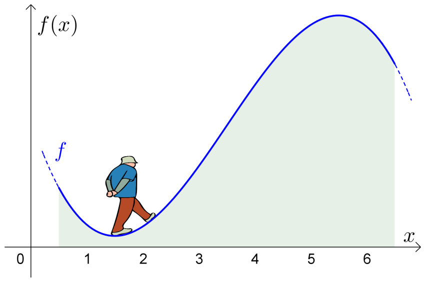
Steigungen berechnen

Der dargestellte Funktionsgraph modelliert das Profil eines Hügels:

- Wo ist der tiefste Punkt?
- Wo ist der höchste Punkt?
- Wie misst man die Steigung in einem Punkt?
- Wo geht es am steilsten bergauf?

Die Differentialrechnung gibt *exakte* Antworten auf diese Fragen.



$f(x) = -\frac{3}{16} \cdot x^3 + \frac{63}{32} \cdot x^2 - \frac{297}{64} \cdot x + \frac{2217}{640}$

Tangente & Linearisierung

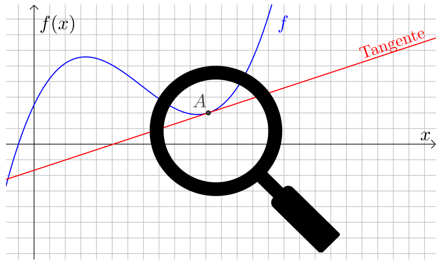
Bisher haben wir nur die Steigung von Geraden berechnet.

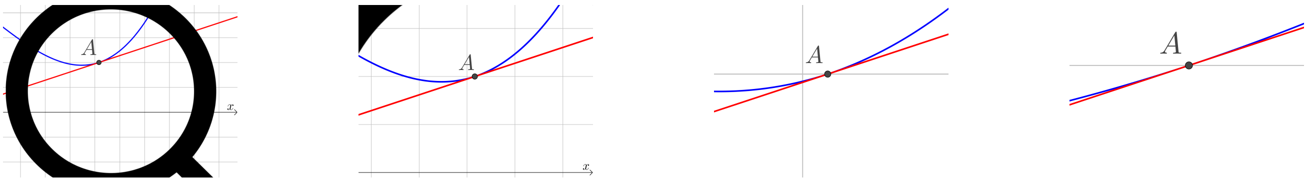
Rechts ist ein Punkt A am Graphen von f eingezeichnet.

Was soll nun die Steigung von f im Punkt A sein?

Wir nehmen den Graphen von f genauer unter die Lupe.

In der Bildreihe unten zoomen wir immer näher an A heran.





Wenn im Punkt A alles *glatt* läuft, dann schmiegt sich der Funktionsgraph an eine Gerade an.

Diese Gerade heißt **Tangente** von f im Punkt A. Die gesuchte Steigung ist die Steigung dieser Gerade.

Die lineare Funktion, deren Graph diese Tangente ist, heißt **Linearisierung** von f in A.

In der Differentialrechnung geht es um die *Berechnung* der Steigung dieser Tangente.

Sekante durch 2 Punkte eines Funktionsgraphen

Rechts ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$ dargestellt.

1) Der Funktionsgraph verläuft durch die Punkte A und B.
Trage die richtigen Koordinaten in die Kästchen ein.

$A = (1 \mid 1) \qquad B = (1{,}5 \mid 2{,}25)$

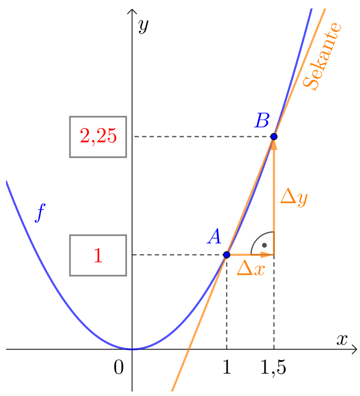
Die eingezeichnete Gerade heißt **Sekante** von f durch A und B.

2) Berechne die Steigung k dieser Sekante.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2{,}25 - 1}{1{,}5 - 1} = 2{,}5$$

3) Ermittle die Gleichung $y = k \cdot x + d$ dieser Sekante.

$$d = y - k \cdot x = 1 - 2{,}5 \cdot 1 = -1{,}5 \implies y = 2{,}5 \cdot x - 1{,}5$$



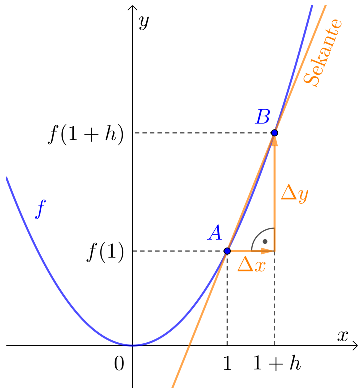
Der **Differenzenquotient** $\boldsymbol{k = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$ misst die **mittlere Änderungsrate** von f in $[1; 1{,}5]$.

Die Steigung dieser Sekante ist ein *Näherungswert* für die Steigung der Tangente im Punkt A.

Von Sekanten zur Tangente am Funktionsgraphen

Rechts ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$ dargestellt.

Der Funktionsgraph verläuft durch die Punkte
$A = (1 \mid f(1))$ und $B = (1 + h \mid f(1 + h))$ mit $h \neq 0$.

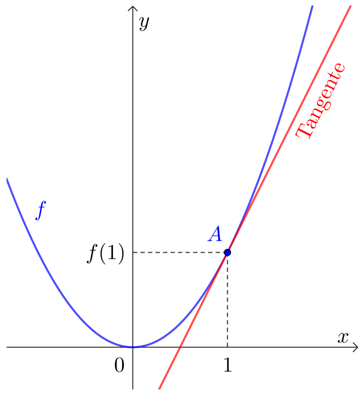


1) Die Steigung der Sekante durch A und B hängt von h ab.
Vereinfache die Formel für die Steigung so weit wie möglich.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{1 + 2 \cdot h + h^2 - 1}{h} = \frac{h \cdot (2+h)}{h} = 2 + h$$

2) Für $h \to 0$ geht die Sekantensteigung also auf den Wert 2 zu.

„Ganz egal, wie sich der Punkt B entlang des Graphen auf den Punkt A hinbewegt, die Steigung der Sekanten strebt immer gegen dieselbe Zahl k."



Wir schreiben dafür auch:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2$$

Dieser Grenzwert ist die Steigung von f an der Stelle 1, also die Steigung der Tangente im Punkt A.

3) Ermittle die Gleichung $y = k \cdot x + d$ der Tangente im Punkt A.

$$d = y - k \cdot x = 1 - 2 \cdot 1 = -1 \implies y = 2 \cdot x - 1$$

Differentialquotient

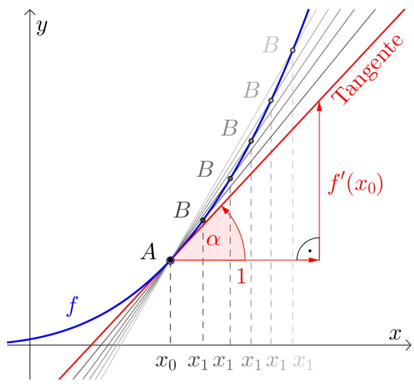
Der Funktionsgraph von f verläuft durch die beiden Punkte $A = (x_0 \mid f(x_0))$ und $B = (x_1 \mid f(x_1))$.

Der Punkt A ist fest, der Punkt B ist auf dem Graphen beweglich. A ist wie ein Gelenk für die Sekanten.

Es gilt also $x_1 = x_0 + h$ mit einer Zahl $h \neq 0$.

Für die **Steigung der Sekante** durch A und B gilt dann:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \boldsymbol{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$



Für die **Steigung der Tangente** von f an der Stelle x_0 schreiben wir kurz $\boldsymbol{f'(x_0)}$: „f strich von x_0"

$$\boldsymbol{f'(x_0)} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \boldsymbol{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

Wenn dieser Grenzwert existiert, dann sagen wir: „f ist **differenzierbar** an der Stelle x_0."

Dieser Grenzwert $x_1 \to x_0$ bzw. $h \to 0$ existiert *nicht* immer. Mehr dazu findest du am Arbeitsblatt – Differenzierbarkeit.

Der **Differentialquotient** $\boldsymbol{f'(x_0)}$ misst die **lokale Änderungsrate** von f an der Stelle x_0.

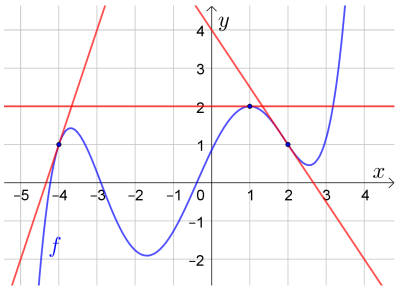
Für den **Steigungswinkel** $\boldsymbol{\alpha}$ an der Stelle x_0 gilt dann: $\boldsymbol{\tan(\alpha) = f'(x_0)}$

$f(x_0)$ und $f'(x_0)$ ablesen

Rechts sind ein Funktionsgraph und 3 Tangenten dargestellt.
Lies die folgenden Funktionswerte und Steigungen ab.

$f(-4) = 1$ $\quad$ $f(1) = 2$ $\quad$ $f(2) = 1$

$f'(-4) = 3$ $\quad$ $f'(1) = 0$ $\quad$ $f'(2) = -\dfrac{3}{2} = -1{,}5$



Ableitungsfunktion

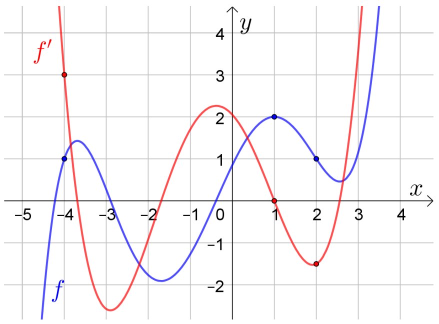
Polynomfunktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen sowie die Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens sind an *jeder* Stelle in ihrem Definitionsbereich differenzierbar.

Ist eine Funktion f an *jeder* Stelle differenzierbar, können wir ihre **Ableitungsfunktion f'** ermitteln.

Rechts sind die Graphen einer Polynomfunktion f und ihrer Ableitungsfunktion f' dargestellt.

Der Funktionswert $f'(x)$ ist gleich groß wie die Steigung von f an der Stelle x.

Das Vorzeichen von f' legt das Monotonieverhalten von f fest.

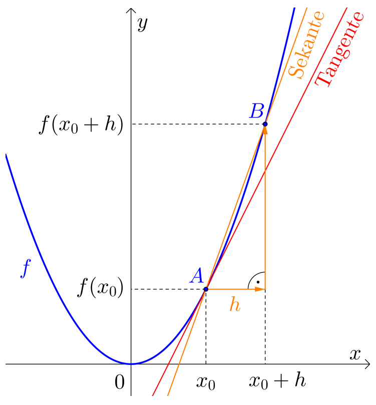


Ableitungsfunktion von $f(x) = x^2$

Rechts ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$ dargestellt.

Wir ermitteln eine Gleichung ihrer Ableitungsfunktion f'.

Der Funktionsgraph verläuft durch die Punkte $A = (x_0 \mid f(x_0))$ und $B = (x_0 + h \mid f(x_0 + h))$ mit $h \neq 0$.



1) Die Steigung der Sekante durch A und B hängt von x_0 und h ab. Vereinfache die Formel für die Steigung so weit wie möglich.

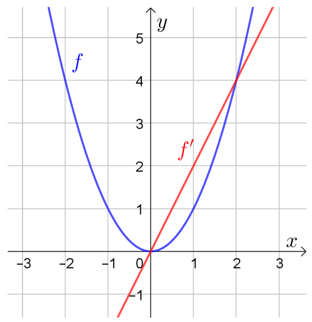
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{x_0^2 + 2\cdot x_0\cdot h + h^2 - x_0^2}{h} = \frac{h\cdot(2\cdot x_0 + h)}{h} = 2\cdot x_0 + h$$

2) Die Steigung der Tangente im Punkt $A = (x_0 \mid f(x_0))$ hängt von x_0 ab. Ermittle den Grenzwert $h \to 0$.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}(2\cdot x_0 + h) = 2\cdot x_0$$

3) Die quadratische Funktion f mit $f(x) = x^2$ hat also die Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = 2\cdot x$.

Zeichne den Funktionsgraphen von f' rechts ein.



Ableitungsfunktion von $f(x) = x^3$

Wir ermitteln die Ableitungsfunktion f' der Funktion f mit $f(x) = x^3$.

1) Eine Sekante verläuft durch die Punkte $A = (x_0 \mid f(x_0))$ und $B = (x_0 + h \mid f(x_0 + h))$.
Stelle mithilfe von x_0 und $h \neq 0$ eine Formel für die Steigung der Sekante auf.
Vereinfache so weit wie möglich. Zum Ausmultiplizieren von $(a+b)^3$ kannst du das Pascalsche Dreieck verwenden.

$$\frac{(x_0+h)^{\mathbf{3}} - x_0^3}{h} = \frac{1\cdot x_0^3 + \mathbf{3}\cdot x_0^2\cdot h + 3\cdot x_0\cdot h^2 + 1\cdot h^3 - x_0^3}{h} =$$
$$= \frac{h\cdot(\mathbf{3}\cdot x_0^2 + 3\cdot x_0\cdot h + h^2)}{h} =$$
$$= \mathbf{3}\cdot x_0^2 + 3\cdot x_0\cdot h + h^2$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

2) Ermittle die Steigung der Tangente an der Stelle x_0.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}(\mathbf{3}\cdot x_0^2 + 3\cdot x_0\cdot h + h^2) = \mathbf{3}\cdot x_0^2$$

3) Die Funktion f mit $f(x) = x^3$ hat also die Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = \mathbf{3}\cdot x^2$.

Ableitungsfunktion von $f(x) = x^n$

Beim Differenzieren von Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Muster.

Dabei sind die rechts markierten Zahlen im Pascalschen Dreieck wesentlich.

Schaue dir die Berechnungen für $f(x) = x^{\mathbf{2}}$ und $f(x) = x^{\mathbf{3}}$ nochmal an.

Die Funktion $f(x) = x^{42}$ hat also die Ableitungsfunktion $f'(x) = \mathbf{42}\cdot x^{41}$.

1
1 **1**
1 **2** 1
1 **3** 3 1
1 **4** 6 4 1

Ableitungsfunktion von $f(x) = 3\cdot x^2 + 6\cdot x + 4$

Wir ermitteln die Ableitungsfunktion f' der Funktion f mit $f(x) = 3\cdot x^2 + 6\cdot x + 4$.

1) Eine Sekante verläuft durch die Punkte $A = (x_0 \mid f(x_0))$ und $B = (x_0 + h \mid f(x_0 + h))$.
Stelle mithilfe von x_0 und $h \neq 0$ eine Formel für die Steigung der Sekante auf.
Vereinfache so weit wie möglich.

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{3\cdot(x_0+h)^2 + 6\cdot(x_0+h) + 4 - (3\cdot x_0^2 + 6\cdot x_0 + 4)}{h} =$$
$$= \frac{\cancel{3\cdot x_0^2} + 6\cdot x_0\cdot h + 3\cdot h^2 + \cancel{6\cdot x_0} + 6\cdot h + \cancel{4} - \cancel{3\cdot x_0^2} - \cancel{6\cdot x_0} - \cancel{4}}{h} =$$
$$= \frac{h\cdot(6\cdot x_0 + 3\cdot h + 6)}{h} = 6\cdot x_0 + 3\cdot h + 6$$

2) Ermittle die Steigung der Tangente an der Stelle x_0.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}(6\cdot x_0 + 3\cdot h + 6) = 6\cdot x_0 + 6$$

3) Die Funktion f mit $f(x) = 3\cdot x^2 + 6\cdot x + 4$ hat also die Ableitungsfunktion $f'(x) = 6\cdot x + 6$.