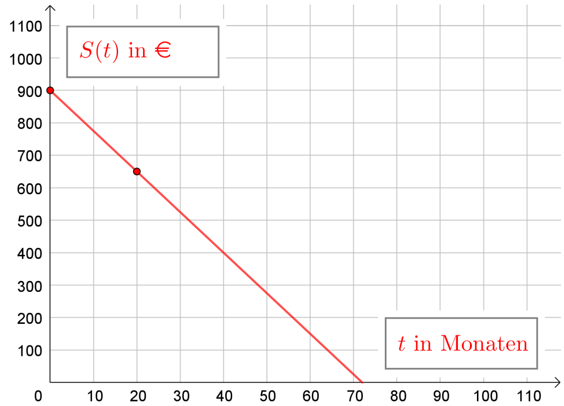
Lineare Funktion

Der Wert eines Smartphones nimmt linear ab.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt der Wert des Smartphones € 900.
Nach 20 Monaten beträgt der Wert nur mehr € 650.
Die Funktion S ordnet jedem Zeitpunkt den aktuellen Wert des Smartphones zu.
$t \dots$ Zeit in Monaten
$S(t) \dots$ Wert des Smartphones in €



1) Skizziere rechts den Funktionsgraphen von S.
Beschrifte die Achsen und skaliere sie geeignet.

2) Ermittle eine Funktionsgleichung von S.

3) In der folgenden Wertetabelle fehlen zwei Werte.
Berechne sie und trage sie in die Wertetabelle ein.

t in Monaten	42	32
$S(t)$ in €	375	500

4) Berechne die Nullstelle von S, und interpretiere ihren Wert im Sachzusammenhang.

Anmerkung: Das lineare Modell vereinfacht die Realität hier stark.
Du wirst andere Funktionstypen kennenlernen, die hier vielleicht realistischer wären.

Die Funktion S ist genau für jene Zeitpunkte $t \geq 0$ definiert, an denen $S(t) \geq 0$ gilt.

5) Ermittle die Definitionsmenge D und die (kleinstmögliche) Wertemenge W der Funktion.

2) $S(t) = k \cdot t + d$

$$k = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{650 - 900}{20 - 0} \frac{€}{\text{Monat}} = -12{,}5\,€/\text{Monat}$$

$$S(0) = 900 \iff k \cdot 0 + d = 900 \iff d = 900\,€$$

$$\text{Funktionsgleichung: } S(t) = -12{,}5 \cdot t + 900$$

3) $S(42) = -12{,}5 \cdot 42 + 900 = 375$

$S(t) = 500 \iff 500 = -12{,}5 \cdot t + 900 \iff 12{,}5 \cdot t = 400 \iff t = 32$

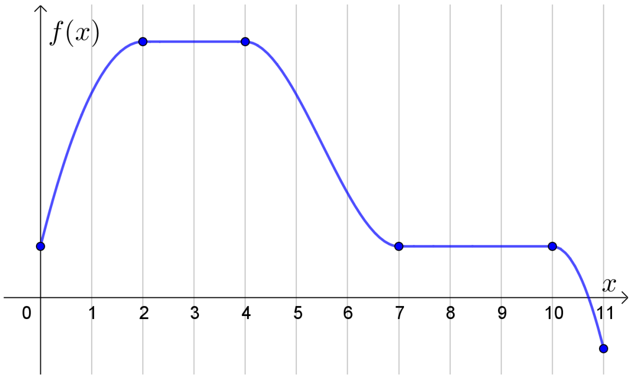
4) $S(t) = 0 \iff 0 = -12{,}5 \cdot t + 900 \iff 12{,}5 \cdot t = 900 \iff t = 72$

In diesem Modell hat das Smartphone nach 72 Monaten den Wert € 0.

5) $D = [0\,\text{Monate}; 72\,\text{Monate}]$ $\qquad W = [€\,0; €\,900]$

Monotonieverhalten

Rechts ist der Graph einer Funktion f im Intervall $[0;11]$ dargestellt.



f ist **konstant** in den Intervallen $[2;4]$ und $[7;10]$.
Das heißt, für alle $x_1, x_2 \in [2;4]$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) = f(x_2)$

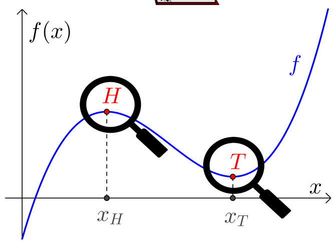
f ist **streng monoton steigend** im Intervall $[0;2]$.
Das heißt, für alle $x_1, x_2 \in [0;2]$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) < f(x_2)$

f ist **monoton steigend** im Intervall $[0;4]$.
Das heißt, für alle $x_1, x_2 \in [0;4]$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$

f ist **streng monoton fallend** im Intervall $[4;7]$.
Das heißt, für alle $x_1, x_2 \in [4;7]$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) > f(x_2)$

f ist **monoton fallend** im Intervall $[2;11]$.
Das heißt, für alle $x_1, x_2 \in [2;11]$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \geq f(x_2)$

Extremstellen & Extrempunkte



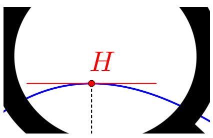
Am Graphen der rechts dargestellten Funktion f sind ein **Hochpunkt** $\boldsymbol{H}$ und ein **Tiefpunkt** $\boldsymbol{T}$ eingezeichnet.

Solche Punkte werden auch **Extrempunkte** genannt. Die zugehörigen Stellen $\boldsymbol{x_H}$ und $\boldsymbol{x_T}$ sind **Extremstellen**.

In einem Hochpunkt ist der Funktionswert *lokal* am größten. Es gilt also

$$f(x_H) \geq f(x)$$

für alle x im Definitionsbereich nahe um x_H. Blicken wir nahe genug auf den Hochpunkt, dann sehen wir *keine* größeren Funktionswerte:

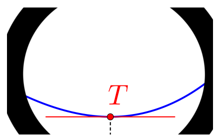


H heißt deshalb auch **lokales Maximum**.

In einem Tiefpunkt ist der Funktionswert *lokal* am kleinsten. Es gilt also

$$f(x_T) \leq f(x)$$

für alle x im Definitionsbereich nahe um x_T. Blicken wir nahe genug auf den Tiefpunkt, dann sehen wir *keine* kleineren Funktionswerte:



T heißt deshalb auch **lokales Minimum**.

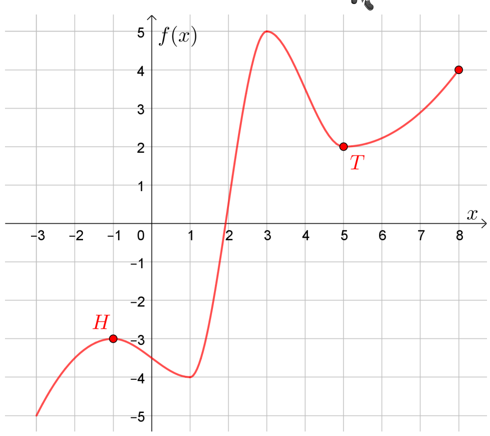
Mithilfe der Differentialrechnung werden wir Extrempunkte berechnen. Die Funktion ändert dort ihr Monotonieverhalten.

Monotonieverhalten

Eine Funktion f ist auf dem Intervall $[-3;8]$ definiert. Sie hat die folgenden Eigenschaften:

- Hochpunkt $H = (-1 \mid -3)$
- Tiefpunkt $T = (5 \mid 2)$
- $f(8) = 4$

Skizziere rechts einen möglichen Funktionsgraphen von f.

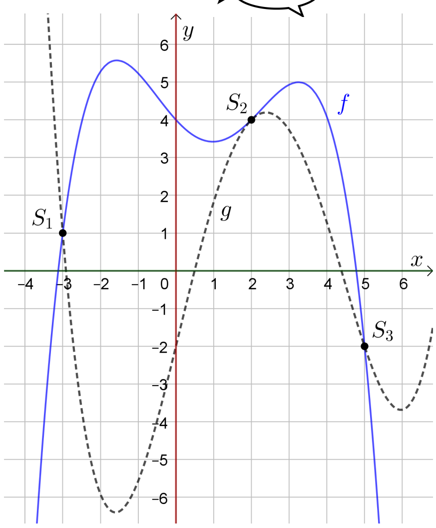


Schnittstelle / Schnittpunkt

Rechts sind die Graphen zweier Funktionen f und g dargestellt.

Es gibt drei Stellen, an denen die beiden Funktionen jeweils den gleichen Funktionswert haben.
Diese drei Stellen sind die **Schnittstellen** von f und g.
Sie sind die Lösungen der Gleichung $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$.

Die drei **Schnittpunkte** S_1, S_2 und S_3 sind rechts eingezeichnet.
Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein:



i) $f(-3) = g(-3) = 1 \implies S_1 = (-3 \mid 1)$

ii) $f(2) = g(2) = 4 \implies S_2 = (2 \mid 4)$

iii) $f(5) = g(5) = -2 \implies S_3 = (5 \mid -2)$

Im Schnittpunkt S_2 haben die beiden Funktionen nicht nur den gleichen Funktionswert, sondern auch die gleiche Steigung.
In diesem Fall nennen wir den Schnittpunkt auch **Berührpunkt**.

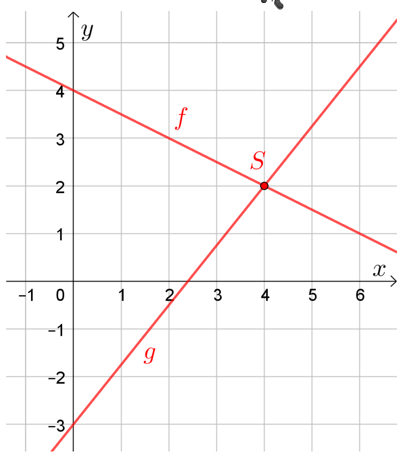
Schnittstelle / Schnittpunkt

Für die lineare Funktion f gilt: $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + 4$

Für die lineare Funktion g gilt: $g(x) = \frac{5}{4} \cdot x - 3$

1) Berechne den Schnittpunkt von f und g.

2) Zeichne rechts die Graphen von f und g ein.



$$f(x) = g(x)$$
$$-\frac{1}{2} \cdot x + 4 = \frac{5}{4} \cdot x - 3$$
$$-2 \cdot x + 16 = 5 \cdot x - 12$$
$$28 = 7 \cdot x$$
$$x = 4$$

$$f(4) = g(4) = 2 \implies S = (4 \mid 2)$$

Verschiebung und Skalierung

Für die lineare Funktion f gilt: $f(x) = 3 \cdot x - 6$
Mithilfe von f wird eine lineare Funktion g gebildet:

a) $g(x) = 2 \cdot f(x)$ **c)** $g(x) = -f(x)$ **e)** $g(x) = f(x) - 2$

b) $g(x) = f(2 \cdot x)$ **d)** $g(x) = f(-x)$ **f)** $g(x) = f(x - 2)$

Ermittle eine Gleichung der linearen Funktion g in der Form $g(x) = k \cdot x + d$.

a) $g(x) = 2 \cdot (3 \cdot x - 6) = 6 \cdot x - 12$

b) $g(x) = 3 \cdot (2 \cdot x) - 6 = 6 \cdot x - 6$

c) $g(x) = -(3 \cdot x - 6) = -3 \cdot x + 6$

d) $g(x) = 3 \cdot (-x) - 6 = -3 \cdot x - 6$

e) $g(x) = (3 \cdot x - 6) - 2 = 3 \cdot x - 8$

f) $g(x) = 3 \cdot (x - 2) - 6 = 3 \cdot x - 12$

Allgemein sind die Graphen der Funktionen f und g mit $g(x) = a \cdot f(b \cdot x + c) + d$ eng miteinander verknüpft. Mehr zur grafischen Interpretation der Parameter a, b, c und d findest du am Arbeitsblatt – Verschiebung und Skalierung von Funktionsgraphen.

Periodizität

Die rechts unten dargestellte Funktion f ist **periodisch** mit Periode $p = 4$.

Es gilt nämlich an jeder Stelle x:

$$\boldsymbol{f(x) = f(x+p)}$$

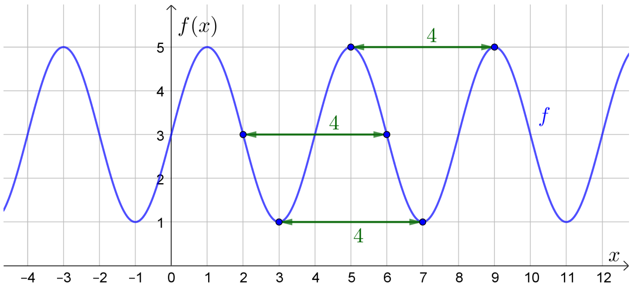
Zum Beispiel:

$$\cdots = \underbrace{f(-4)}_{=3} = \underbrace{f(0)}_{=3} = \underbrace{f(4)}_{=3} = \underbrace{f(8)}_{=3} = \cdots$$

$$\cdots = \underbrace{f(-3)}_{=5} = \underbrace{f(1)}_{=5} = \underbrace{f(5)}_{=5} = \underbrace{f(9)}_{=5} = \cdots$$

Die Zahl 4 ist die kürzeste Periode dieser Funktion.

Jedes Vielfache von 4 ist auch eine Periode der Funktion.



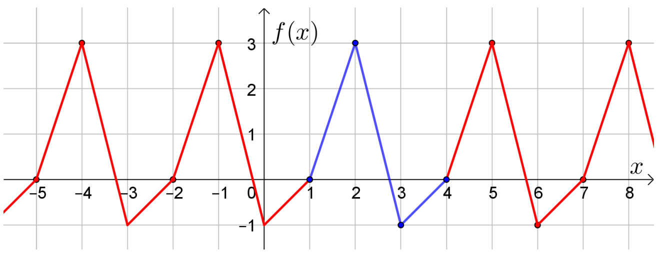
Jede allgemeine Sinusfunktion f mit

$$f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + c$$

ist periodisch. Die Periode hängt von ω ab.

Periodizität

Setze den Funktionsgraphen von f im dargestellten Bereich so fort, dass f periodisch mit Periode 3 ist.



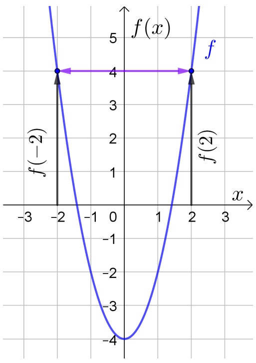
Gerade Funktion / Ungerade Funktion

Der Graph der Funktion f ist symmetrisch zur senkrechten Achse.

An jeder Stelle x gilt:

$$\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$$

In diesem Fall nennt man f auch eine **gerade Funktion**.

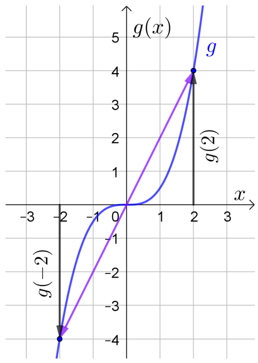


Der Graph der Funktion g ist symmetrisch zum Punkt $(0 \mid 0)$.

An jeder Stelle x gilt:

$$\boldsymbol{g(-x) = -g(x)}$$

In diesem Fall nennt man g auch eine **ungerade Funktion**.

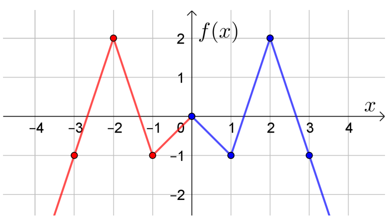


Jede Potenzfunktion p mit $p(x) = a \cdot x^m$ ist – je nach Wert von $m \in \mathbb{Z}^*$ – entweder gerade oder ungerade.

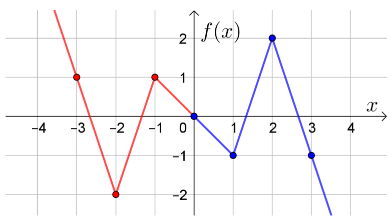
Gerade Funktion / Ungerade Funktion

Setze den Funktionsgraphen von f für $x < 0$ so fort, dass f eine ...

... gerade Funktion ist.



... ungerade Funktion ist.



Division durch 0

Die Division $\dfrac{3}{0}$ ist *nicht* definiert. Es gibt *keine* Zahl, die mit 0 multipliziert, die Zahl 3 ergibt.

Streiche jeweils die falsche Antwort durch:

i) Wenn ☺ „ein bisschen" größer als 0 ist, $\frac{3}{0{,}000\,01}$

dann ist $\dfrac{3}{☺}$ eine betragsmäßig „sehr große" positive ~~/ negative~~ Zahl.

ii) Wenn ☺ „ein bisschen" kleiner als 0 ist, $\frac{3}{-0{,}000\,01}$

dann ist $\dfrac{3}{☺}$ eine betragsmäßig „sehr große" ~~positive /~~ negative Zahl.

Polstelle

Die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{3}{x-4}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert außer für $x = 4$.

Streiche jeweils die falsche Antwort durch:

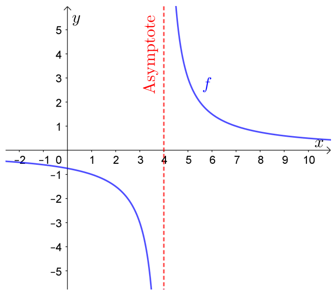
i) Wenn x „ein bisschen" größer als 4 ist, $\frac{3}{0{,}000\,01}$
dann ist $f(x)$ eine betragsmäßig „sehr große" positive ~~/ negative~~ Zahl.

ii) Wenn x „ein bisschen" kleiner als 4 ist, $\frac{3}{-0{,}000\,01}$
dann ist $f(x)$ eine betragsmäßig „sehr große" ~~positive /~~ negative Zahl.

iii) Wenn x eine betragsmäßig „sehr große" positive Zahl ist, $\frac{3}{100\,000}$
dann ist $f(x)$ eine betragsmäßig „sehr kleine" positive ~~/ negative~~ Zahl.

iv) Wenn x eine betragsmäßig „sehr große" negative Zahl ist, $\frac{3}{-100\,000}$
dann ist $f(x)$ eine betragsmäßig „sehr kleine" ~~positive /~~ negative Zahl.

Der Graph der Funktion f ist rechts dargestellt.



Die Stelle $x = 4$ nennt man in diesem Fall auch **Polstelle**.

Die senkrechte Gerade durch die Polstelle nennt man **Asymptote**.

Die Funktionswerte werden in jeder Umgebung der Polstelle betragsmäßig beliebig groß.

Polstelle

Die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{-42}{(x+3)\cdot(x-2)}$ hat die Polstellen $x = -3$ und $x = 2$.

1) Der Graph schneidet die senkrechte Achse in $(0 \mid 7)$.

2) Trage jeweils das Vorzeichen $(+\,/\,-)$ von $f(x)$ unten ein.

	$x < -3$	$-3 < x < 2$	$x > 2$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

3) Wie viele Nullstellen hat f? Keine, weil $\frac{-42}{☺} \neq 0$.

4) Skizziere rechts den Funktionsgraphen von f.