Euklidischer Algorithmus

Wir können den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen mithilfe der Primfaktorzerlegung berechnen.
Jetzt berechnen wir $\text{ggT}(603, 114)$ mit dem **Euklidischen Algorithmus**:

1) „Wie oft geht 114 in 603? 5 Mal, 33 Rest.“ $\quad 603 = 114 \cdot \boxed{5} + \boxed{33}$

2) „Wie oft geht 33 in 114? 3 Mal, 15 Rest.“ $\quad 114 = \boxed{33} \cdot \boxed{3} + \boxed{15}$

3) „Wie oft geht 15 in 33? 2 Mal, 3 Rest.“ $\quad \boxed{33} = \boxed{15} \cdot \boxed{2} + \boxed{\mathbf{3}} \quad \Longrightarrow \text{ggT}(603, 114) = 3$

4) „Wie oft geht 3 in 15? 5 Mal, 0 Rest.“ $\quad \boxed{15} = \boxed{\mathbf{3}} \cdot \boxed{5} + \boxed{0}$

Der letzte Rest $\neq 0$ ist der gesuchte größte gemeinsame Teiler.

Euklidischer Algorithmus

Berechne $\text{ggT}(630, 282)$ und $\text{ggT}(876, 612)$ mit dem Euklidischen Algorithmus.

$$630 = 282 \cdot \boxed{2} + \boxed{66}$$
$$282 = \boxed{66} \cdot \boxed{4} + \boxed{18}$$
$$\boxed{66} = \boxed{18} \cdot \boxed{3} + \boxed{12}$$
$$\boxed{18} = \boxed{12} \cdot \boxed{1} + \boxed{6}$$
$$\boxed{12} = \boxed{6} \cdot \boxed{2} + \boxed{0}$$

$$\Longrightarrow \text{ggT}(630, 282) = 6$$

$$876 = 612 \cdot \boxed{1} + \boxed{264}$$
$$612 = \boxed{264} \cdot \boxed{2} + \boxed{84}$$
$$\boxed{264} = \boxed{84} \cdot \boxed{3} + \boxed{12}$$
$$\boxed{84} = \boxed{12} \cdot \boxed{7} + \boxed{0}$$

$$\Longrightarrow \text{ggT}(876, 612) = 12$$

Warum funktioniert der Euklidische Algorithmus?

Um zu erklären, warum der Euklidische Algorithmus tatsächlich den größten gemeinsamen Teiler liefert, verwenden wir die folgenden 3 Eigenschaften:

1) Für positive natürlichen Zahlen a und b mit $a \mid b$ gilt: $\text{ggT}(a, b) = a$

2) $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, a)$

3) $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a, b + k \cdot a)$ mit $k \in \mathbb{Z}$

t ist ein Teiler von a. $\iff$ Es gibt eine ganze Zahl c mit $a = c \cdot t$.
Erkläre: Aus $t \mid a$ und $t \mid b$ folgt $t \mid (b + k \cdot a)$.
Erkläre: Aus $t \mid a$ und $t \mid (b + k \cdot a)$ folgt $t \mid b$.

Rechts siehst du die Schritte des Euklidischen Algorithmus in umgekehrter Reihenfolge.

Erkläre mit den 3 Rechenregeln, warum der letzte Rest $\neq 0$ tatsächlich der größte gemeinsame Teiler ist.

$$\boxed{15} = \boxed{\mathbf{3}} \cdot \boxed{5} + \boxed{0} \quad \overset{1)}{\Longrightarrow} \quad \text{ggT}(15, 3) = \underline{\ 3\ }$$
$$\boxed{33} = \boxed{15} \cdot \boxed{2} + \boxed{\mathbf{3}} \quad \overset{2,3)}{\Longrightarrow} \quad \text{ggT}(33, 15) = \underline{\ 3\ }$$
$$114 = \boxed{33} \cdot \boxed{3} + \boxed{15} \quad \overset{2,3)}{\Longrightarrow} \quad \text{ggT}(114, 33) = \underline{\ 3\ }$$
$$603 = 114 \cdot \boxed{5} + \boxed{33} \quad \overset{2,3)}{\Longrightarrow} \quad \text{ggT}(603, 114) = \underline{\ 3\ }$$

Ganzzahlige Linearkombinationen

Findest du zwei *ganze* Zahlen für die Lücken, damit die folgende Gleichung stimmt?

$$42 \cdot (-1) + 15 \cdot 3 = 3$$

Warum können keine *ganzen* Zahlen in die Lücken passen, damit die folgende Gleichung gilt?

$$14 \cdot \boxed{} + 6 \cdot \boxed{} = 3$$

Die linke Seite ist immer eine gerade Zahl.

Erweiterter Euklidischer Algorithmus

Der größte gemeinsame Teiler von a und b kann stets als ganzzahlige Linearkombination von a und b dargestellt werden. Es gibt also ganze Zahlen r und s mit

$$a \cdot \boxed{r} + b \cdot \boxed{s} = \mathrm{ggT}(a, b).$$

Lemma von Bézout

Der **Euklidische Algorithmus** hilft uns diese Koeffizienten r und s zu finden.

Zum Beispiel: $\mathrm{ggT}(603, 114) = \mathbf{3}$
Gesucht sind ganze Zahlen r und s mit

$$603 \cdot r + 114 \cdot s = \mathbf{3}.$$

1) Wir formen die Zeilen vom Euklidischen Algorithmus jeweils auf den Rest um.

2) Wir setzen rückwärts ein, um die ganzen Zahlen r und s zu ermitteln:

$$603 = 114 \cdot \boxed{5} + \boxed{33} \implies 33 = 603 - 114 \cdot 5$$
$$114 = \boxed{33} \cdot \boxed{3} + \boxed{15} \implies 15 = 114 - 33 \cdot 3$$
$$\boxed{33} = \boxed{15} \cdot \boxed{2} + \boxed{\mathbf{3}} \implies \mathbf{3} = 33 - 15 \cdot 2$$
$$\boxed{15} = \boxed{\mathbf{3}} \cdot \boxed{5} + \boxed{0}$$

$$\mathbf{3} = 33 - 15 \cdot 2 = 33 - (114 - 33 \cdot 3) \cdot 2 = 33 \cdot 7 - 114 \cdot 2 =$$
$$= (603 - 114 \cdot 5) \cdot 7 - 114 \cdot 2 = 603 \cdot 7 - 114 \cdot 37$$

$$\implies 603 \cdot 7 + 114 \cdot (-37) = \mathbf{3}$$

Erweiterter Euklidischer Algorithmus

Ermittle $\mathrm{ggT}(700, 297)$ sowie ganze Zahlen r und s mit $700 \cdot r + 297 \cdot s = \mathrm{ggT}(700, 297)$.

$$700 = 297 \cdot \boxed{2} + \boxed{106} \implies 106 = 700 - 297 \cdot 2$$
$$297 = \boxed{106} \cdot \boxed{2} + \boxed{85} \implies 85 = 297 - 106 \cdot 2$$
$$\boxed{106} = \boxed{85} \cdot \boxed{1} + \boxed{21} \implies 21 = 106 - 85 \cdot 1$$
$$\boxed{85} = \boxed{21} \cdot \boxed{4} + \boxed{1} \implies 1 = 85 - 21 \cdot 4$$
$$\boxed{21} = \boxed{1} \cdot \boxed{21} + \boxed{0}$$

$$\implies \mathrm{ggT}(700, 297) = 1 = 85 - 21 \cdot 4 = 85 - (106 - 85 \cdot 1) \cdot 4 = 85 \cdot 5 - 106 \cdot 4 =$$
$$= (297 - 106 \cdot 2) \cdot 5 - 106 \cdot 4 = 297 \cdot 5 - 106 \cdot 14 =$$
$$= 297 \cdot 5 - (700 - 297 \cdot 2) \cdot 14 = 700 \cdot (-14) + 297 \cdot 33$$