Potenzen

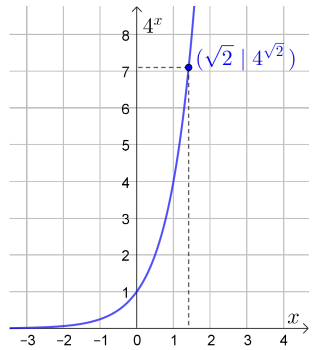
Am Arbeitsblatt – Potenzen und Wurzeln haben wir Potenzen a^x für alle $a > 0$ und $x \in \mathbb{Q}$ definiert:

1) Wenn x eine natürliche Zahl ist, dann gilt zum Beispiel: $a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ und $a^0 = 1$

2) Wenn x eine negative Zahl ist, dann gilt zum Beispiel: $a^{-5} = \frac{1}{a^5}$ und $a^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{5}{3}}}$

3) Wenn x eine rationale Zahl ist, dann gilt zum Beispiel: $a^{2,3} = a^{\frac{23}{10}} = \sqrt[10]{a^{23}}$

4) Berechne mit dem Taschenrechner: $4^{\sqrt{2}} = 4^{1,414213\ldots} = 7{,}102\,993\ldots$



Die Zahlen 4^1, $4^{1,4}$, $4^{1,41}$, $4^{1,414}$, $4^{1,4142}$, $4^{1,414\,21}$, $4^{1,414\,213}$, ... werden monoton größer.
Sie werden aber *nicht* unbeschränkt groß, weil jede dieser Zahlen kleiner als $4^2 = 16$ ist.
Sie nähern sich dem sogenannten Grenzwert $4^{\sqrt{2}}$ *beliebig genau* an.

Damit ist die Potenz 4^x auch für jede irrationale Zahl x definiert.

Rechts siehst du den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 4^x$.

So sind die Potenzen a^x für alle $a > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ definiert,
und es gelten die **Rechenregeln für Potenzen**:

i) $\boldsymbol{a^x \cdot a^y = a^{x+y}}$ **ii)** $\boldsymbol{\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}}$ **iii)** $\boldsymbol{(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x}$ **iv)** $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}}$ **v)** $\boldsymbol{(a^x)^y = a^{x \cdot y}}$

Für alle $a > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\boldsymbol{a^x > 0}$, zum Beispiel: $4^0 = 1$ bzw. $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

Exponentialfunktion

Jede Funktion f mit

$$\boldsymbol{f(x) = c \cdot a^x} \quad \text{mit } a > 0,\ a \neq 1,\ c \neq 0$$

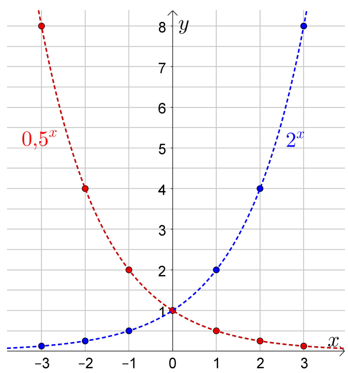
heißt **Exponentialfunktion** mit **Basis** $\boldsymbol{a}$.

Die unabhängige Variable x ist ...
- ... bei *Exponential*funktionen $f(x) = c \cdot a^x$ der *Exponent*.
- ... bei Potenzfunktionen $g(x) = c \cdot x^m$ die Basis.

$a \cdot a$

Unten ist eine Wertetabelle von $f(x) = 2^x$ und $g(x) = 0{,}5^x$ angegeben.
Skizziere rechts die beiden Funktionsgraphen.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8
$g(x)$	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125



Für jede Basis a mit $a > 1$ gilt:
Je größer der Exponent x, desto *größer* ist die Potenz a^x.

Für jede Basis a mit $0 < a < 1$ gilt:
Je größer der Exponent x, desto *kleiner* ist die Potenz a^x.

Einfluss der Parameter a und c

Die Graphen der vier Exponentialfunktionen

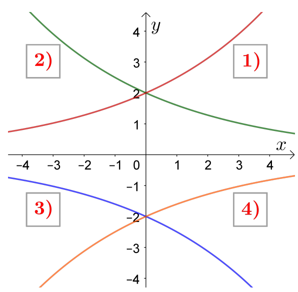
1) $f_1(x) = 2 \cdot 1{,}25^x$

2) $f_2(x) = 2 \cdot 0{,}8^x$

3) $f_3(x) = -2 \cdot 1{,}25^x$

4) $f_4(x) = -2 \cdot 0{,}8^x$

sind rechts dargestellt. Beschrifte die Funktionsgraphen.



Allgemein verläuft der Graph von $f(x) = c \cdot a^x$ durch den Punkt $(0 \mid c)$.

Prozentrechnung

Erinnere dich, dass wir jede Multiplikation mit einer positiven Zahl als Prozentrechnung deuten können:

i) $c \cdot 1{,}42 = c \cdot 142\,\%$ mit $c > 0$

c *auf* $142\,\%$ seines Werts vergrößern

c *um* $42\,\%$ seines Werts vergrößern

ii) $c \cdot 0{,}42 = c \cdot 42\,\%$ mit $c > 0$

c *auf* $42\,\%$ seines Werts verkleinern

c *um* $58\,\%$ seines Werts verkleinern

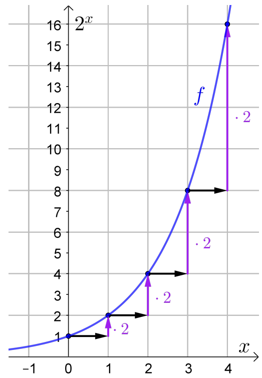
Interpretation des Werts der Basis a

Für jede Exponentialfunktion f mit $\boldsymbol{f(x) = c \cdot a^x}$ gilt:

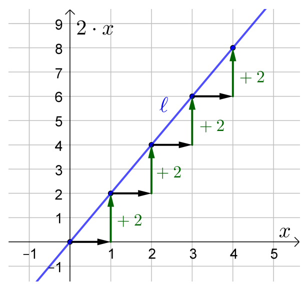
$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{c \cdot a^{x+1}}{c \cdot a^x} = \frac{a^x \cdot a^1}{a^x} = a \implies \boldsymbol{f(x+1) = f(x) \cdot a}$$

Für jede lineare Funktion ℓ mit $\ell(x) = k \cdot x + d$ gilt hingegen: $\ell(x+1) = \ell(x) + k$

Exponentialfunktion: $f(x) = 2^x$



Lineare Funktion: $\ell(x) = 2 \cdot x$



a) Für die Exponentialfunktion g gilt: $g(x) = c \cdot 1{,}3^x$
Trage die richtigen Zahlen in die Kästchen ein.

1) $g(1)$ ist um $30\,\%$ größer als $g(0)$. $\frac{g(1)}{g(0)} = \frac{c \cdot 1{,}3}{c \cdot 1} = 1{,}3$

2) $g(2)$ ist um $69\,\%$ größer als $g(0)$. $\frac{g(2)}{g(0)} = 1{,}3^2 = 1{,}69$

3) $g(3)$ ist um $119{,}7\,\%$ größer als $g(0)$. $\frac{g(3)}{g(0)} = 1{,}3^3 = 2{,}197$

b) Für die Exponentialfunktion h gilt: $h(x) = c \cdot 0{,}9^x$
Trage die richtigen Zahlen in die Kästchen ein.

1) $h(1)$ ist um $10\,\%$ kleiner als $h(0)$. $\frac{h(1)}{h(0)} = \frac{c \cdot 0{,}9}{c \cdot 1} = 0{,}9$

2) $h(2)$ ist um $19\,\%$ kleiner als $h(0)$. $\frac{h(2)}{h(0)} = 0{,}9^2 = 0{,}81$

3) $h(3)$ ist um $27{,}1\,\%$ kleiner als $h(0)$. $\frac{h(3)}{h(0)} = 0{,}9^3 = 0{,}729$

Exponentielles Wachstum

Der Wert eines Sparbuchs mit 300 € Kapital wächst pro Jahr effektiv um $2{,}8\,\%$.

1) Welchen Wert hat das Sparbuch nach einem Jahr?

$300 \cdot 102{,}8\,\% = 300 \cdot 1{,}028 = 308{,}40$ €

2) Welchen Wert hat das Sparbuch nach 5 Jahren?

$300 \cdot 1{,}028^5 = 344{,}41...$ €

3) $K(n)$ ist der Wert des Sparbuchs in € nach n Jahren.
Stelle eine Gleichung der Exponentialfunktion K auf.

$$K(n) = 300 \cdot 1{,}028^n$$

4) Nach wie vielen Jahren hat sich der Wert des Sparbuchs erstmals verdoppelt?
Diese Zeitdauer heißt auch **Verdopplungszeit**. Nähere die Verdopplungszeit dieser Exponentialfunktion durch Probieren mit dem Taschenrechner auf ein Jahr genau an.
Mehr zur *Berechnung* der Verdopplungszeit findest du am Arbeitsblatt – Logarithmusfunktionen.

$K(25) = 598{,}34...$ € < 600 € $\qquad K(26) = 615{,}09...$ € > 600 €
Nach 26 Jahren hat sich der Wert des Sparbuchs erstmals verdoppelt.

Wachstumsfaktor

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind 250 Bakterien in einer Petrischale.
Die Bakterienanzahl in der Petrischale wächst exponentiell.
Für die Bakterienanzahl nach t Stunden gilt also: $B(t) = c \cdot a^t$
Die Bakterienanzahl hat sich nach 4 Stunden um 28 % vergrößert.

1) Berechne a und c. Für die Berechnung von a gibt es mehrere Lösungswege.

2) Um wieviel Prozent wächst die Bakterienanzahl pro Stunde? Müssen es genau 7 % oder mehr/weniger sein?

$$B(0) = 250 \implies c \cdot a^0 = 250 \implies c = 250$$

Lösungsweg 1 (Einsetzen in Funktionsgleichung):

$$B(4) = 1{,}28 \cdot B(0) \implies c \cdot a^4 = 1{,}28 \cdot c \implies a^4 = 1{,}28 \implies a = \sqrt[4]{1{,}28} = 1{,}0636...$$

Lösungsweg 2 (Interpretation der Basis a): $a^4 = 1{,}28 \implies a = \sqrt[4]{1{,}28} = 1{,}0636...$

Lösungsweg 3 (Rechenregeln für Potenzen): Pro 4 Stunden wird mit dem Faktor 1,28 multipliziert.

$$B(t) = 250 \cdot 1{,}28^{\frac{t}{4}} = 250 \cdot \left(1{,}28^{\frac{1}{4}}\right)^t = 250 \cdot 1{,}0636...^t$$

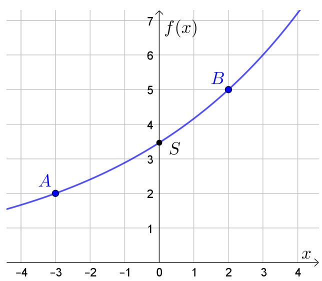
Pro Stunde wächst die Bakterienanzahl also um 6,36... %.

Zwei Punkte

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ verläuft durch die Punkte $A = (-3 \mid 2)$ und $B = (2 \mid 5)$.

1) Berechne a und c.

2) Welche Koordinaten hat der Schnittpunkt S mit der vertikalen Achse?



$$\text{I}: \quad 2 = c \cdot a^{-3} \implies c = \frac{2}{a^{-3}} = 2 \cdot a^3$$

$$\text{II}: \quad 5 = c \cdot a^2$$

Lösungsweg 1 (Gleichungssystem mit Einsetzungsverfahren lösen):

$$\overset{\text{II}}{\implies} 5 = 2 \cdot a^3 \cdot a^2 \implies \frac{5}{2} = a^5 \implies a = \sqrt[5]{\frac{5}{2}} = 1{,}201...$$

Lösungsweg 2 (Interpretation der Basis a): $2 \cdot a^5 = 5 \implies a = \sqrt[5]{\frac{5}{2}} = 1{,}201...$

Lösungsweg 3 (Rechenregeln für Potenzen): $2 \cdot \frac{5}{2} = 5$

Pro 5 Schritte nach rechts wird also mit dem Faktor $\frac{5}{2}$ multipliziert. $\implies f(x) = c \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x}{5}} = c \cdot 1{,}201...^x$

$$\implies c = 2 \cdot (1{,}201...)^3 = 3{,}465...$$

$$f(0) = c \cdot a^0 = c = 3{,}465... \implies S = (0 \mid 3{,}465...)$$

Ist $0{,}5^{1000} = 0$?

Welches Ergebnis zeigt dein Taschenrechner jeweils an?

$0{,}5^{10} = 0{,}000\,976...$ $\qquad 0{,}5^{100} = 7{,}88... \cdot 10^{-31}$ $\qquad 0{,}5^{1000} = 0$

Begründe, warum $0{,}5^{1000}$ *nicht* 0 sein kann.

Es muss $0{,}5^{1000} = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot \ldots \cdot 0{,}5$ als Produkt positiver Zahlen wieder positiv sein.

Für den Taschenrechner sind aber alle Zahlen zwischen 0 und 10^{-100} gleich 0.

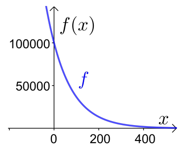
Grenzwert & Asymptotisches Verhalten

Ist $0 < a < 1$, dann werden die Zahlen a^1, a^2, a^3, a^4, ... immer kleiner und kommen der Zahl 0 beliebig nahe. Wir schreiben kurz

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \quad \text{bzw.} \quad a^n \to 0$$

und sprechen: „*Der Grenzwert (Limes) von a^n für n gegen unendlich ist* 0.“ lim wie *limit* im Englischen.

Die Funktion f mit $f(x) = 100\,000 \cdot 0{,}99^x$ hat die folgenden Eigenschaften:



i) f ist streng monoton fallend.

ii) Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

iii) Die Funktionswerte kommen für größer werdendes x der Zahl 0 beliebig nahe: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

Mehr dazu findest du am Arbeitsblatt – Grenzwert von Folgen I und am Arbeitsblatt – Beschränktes Wachstum.

Zinseszinsen

In Utopia bietet dir eine Bank verschiedene Sparmöglichkeiten an: Für welche würdest du dich entscheiden?

1) Ein Sparbuch, dessen Wert 1 Mal pro Jahr effektiv auf $100\,\% + \frac{100\,\%}{1} = 200\,\%$ seines Werts wächst.

2) Ein Sparbuch, dessen Wert 2 Mal pro Jahr effektiv auf $100\,\% + \frac{100\,\%}{2} = 150\,\%$ seines Werts wächst.

3) Ein Sparbuch, dessen Wert 12 Mal pro Jahr effektiv auf $100\,\% + \frac{100\,\%}{12} = 108{,}33...\,\%$ seines Werts wächst.

4) Ein Sparbuch, dessen Wert 365 Mal pro Jahr effektiv auf $100\,\% + \frac{100\,\%}{365} = 100{,}2739...\,\%$ seines Werts wächst.

Auf wieviel Prozent seines Werts wächst das Kapital auf den Sparbüchern **2)**, **3)**, **4)** effektiv pro Jahr?

2) $K \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 = K \cdot 2{,}25$
Das Kapital wächst pro Jahr effektiv auf 225 % seines Werts.

3) $K \cdot 1{,}0833...^{12} = K \cdot 2{,}613...$
Das Kapital wächst pro Jahr effektiv auf 261,3... % seines Werts.

4) $K \cdot 1{,}0002739...^{365} = K \cdot 2{,}714...$
Das Kapital wächst pro Jahr effektiv auf 271,4... % seines Werts.

Was könnte passieren, wenn man nach dem gleichen Prinzip jede Stunde, jede Minute, jede Sekunde, jede Millisekunde, ... verzinst?

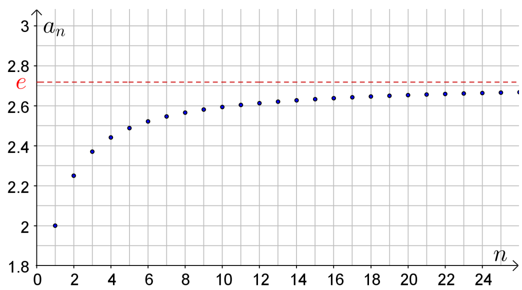
Eulersche Zahl

Der Wert eines Sparbuchs wächst n Mal pro Jahr effektiv auf $100\,\% + \frac{100\,\%}{n}$ seines Werts.

Pro Jahr wird der Wert des Sparbuchs effektiv mit $a_n = (100\,\% + \frac{100\,\%}{n})^n = (1 + \frac{1}{n})^n$ multipliziert.

Die Zahlen $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ wachsen, wenn n größer wird, bleiben aber unter 3:

$$\underbrace{a_1}_{=2} < \underbrace{a_2}_{=2{,}25} < \underbrace{a_3}_{=2{,}37...} < \underbrace{a_4}_{=2{,}44...} < \cdots < \underbrace{a_{365}}_{=2{,}7145...} < \cdots < 3$$



Diese Zahlen streben auf die **Eulersche Zahl *e*** zu:

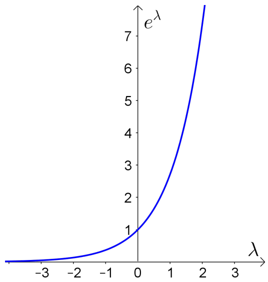
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \boldsymbol{e = 2{,}718281...}$$

Die Eulersche Zahl e ist – so wie $\sqrt{2}$ und die Kreiszahl π – irrational.

Findest du auf deinem Taschenrechner eine Möglichkeit, um die ersten Nachkommastellen von e anzuzeigen?

Basis e

Der Graph der Exponentialfunktion mit $\lambda \mapsto e^\lambda$ ist rechts dargestellt.
Sie ist streng monoton steigend, weil die Basis $e = 2{,}71\ldots$ größer als 1 ist.



Es werden **Exponentialfunktionen** anstelle von

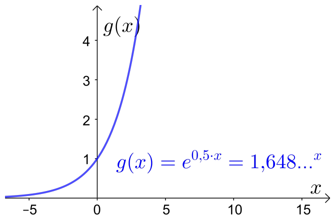
$$\boldsymbol{f(x) = c \cdot a^x} \quad \text{mit } a > 0\,,\ a \neq 1,\ c \neq 0$$

auch folgendermaßen angegeben:

$$\boldsymbol{g(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x}} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{h(x) = c \cdot e^{-\lambda \cdot x}} \quad \text{mit } \lambda > 0\,,\ c \neq 0$$

Die Funktion g mit

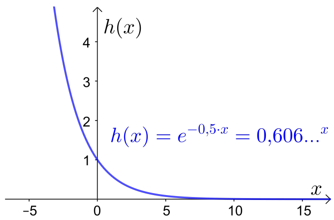
$$g(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x} = c \cdot \left(e^\lambda\right)^x$$



ist für jedes $\lambda > 0$ eine Exponentialfunktion mit Basis $e^\lambda > 1$.
Sie ist also streng monoton steigend.

Die Funktion h mit

$$h(x) = c \cdot e^{-\lambda \cdot x} = c \cdot \left(e^{-\lambda}\right)^x$$



ist für jedes $\lambda > 0$ eine Exponentialfunktion mit Basis $e^{-\lambda} = \dfrac{1}{e^\lambda} < 1$.
Sie ist also streng monoton fallend.

Zerfallsgesetz

Das im Jahr 1986 in Tschernobyl freigesetzte Cäsium-137 zerfällt annähernd nach folgendem Gesetz:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}023\,043 \cdot t}$$

$t \ldots$ Zeit in Jahren ($t = 0$ ist das Jahr 1986.)
$N(t) \ldots$ vorhandene Menge Cäsium-137 zum Zeitpunkt t
$N_0 \ldots$ freigesetzte Menge Cäsium-137 im Jahr 1986, denn: $N(0) = N_0 \cdot e^0 = N_0$

1) Wieviel Prozent der freigesetzten Menge Cäsium-137 waren im Jahr 2023 noch vorhanden?

2) Wandle die Gleichung in die Form $N(t) = N_0 \cdot a^t$ um. Interpretiere den Wert von a.

3) Wie viele Jahre dauert es, bis sich die vorhandene Menge Cäsium-137 halbiert?
Diese Zeitdauer heißt auch **Halbwertszeit**. Nähere die Halbwertszeit von Cäsium-137 durch Probieren mit dem Taschenrechner auf ein Jahr genau an.
Mehr zur *Berechnung* dieser Halbwertszeit findest du am Arbeitsblatt – Logarithmusfunktionen.

1) $2023 - 1986 = 37 \implies N(37) = N_0 \cdot 0{,}4263\ldots$
Im Jahr 2023 waren also noch 42,63... % der freigesetzten Menge vorhanden.

2) $N(t) = N_0 \cdot \left(e^{-0{,}023\,043}\right)^t = N_0 \cdot 0{,}9772\ldots^t$
Pro Jahr wird die vorhandene Menge also *auf* $a = 97{,}72\ldots\,\%$ bzw. *um* $1 - a = 2{,}27\ldots\,\%$ verkleinert.

3) $N(30) = N_0 \cdot 50{,}09\ldots\,\% > N_0 \cdot 50\,\%$ $\qquad N(31) = N_0 \cdot 48{,}95\ldots\,\% < N_0 \cdot 50\,\%$
Die Halbwertszeit von Cäsium-137 beträgt also rund 30 Jahre.