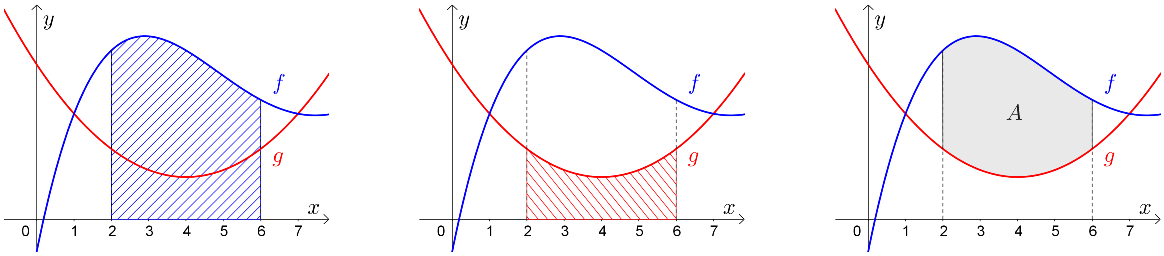
Oben – Unten

1) Zeichne links unten eine Fläche mit Inhalt $\displaystyle\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x$ ein.

2) Zeichne im mittleren Bild eine Fläche mit Inhalt $\displaystyle\int_2^6 g(x)\,\mathrm{d}x$ ein.

3) Zeichne rechts unten eine Fläche mit Inhalt $\displaystyle\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_2^6 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^6 (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$ ein.



Flächeninhalt zwischen Funktionsgraphen

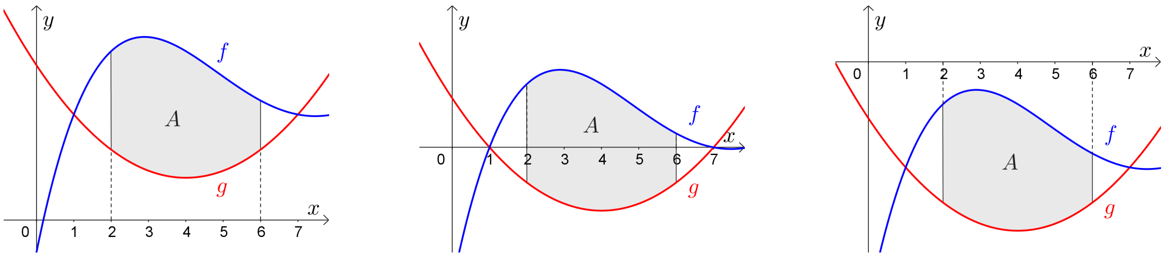
Sind f und g stetige Funktionen mit $\boldsymbol{f(x) \geq g(x)}$ für alle x im Intervall $[a;b]$, dann ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$$

der Flächeninhalt zwischen den Graphen von f und g im Intervall $[a;b]$.

Vertikale Verschiebung

Wir verschieben beide Funktionsgraphen um dieselbe Konstante nach unten:



Der eingezeichnete Flächeninhalt A zwischen den Graphen verändert sich dabei *nicht*.

In allen drei Bildern gilt somit: $A = \displaystyle\int_2^6 (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$

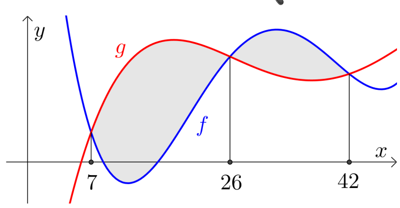
Das Ergebnis hängt also *nicht* davon ab, ob die Funktionswerte positiv oder negativ sind.

Es kommt nur darauf an, dass für alle Stellen x im Intervall $f(x) \geq g(x)$ gilt.

Schnittstellen

Die rechts dargestellten Graphen der Funktionen f und g schließen grau markierte Flächen ein.

Stelle mithilfe von f und g eine Formel zur Berechnung des gesamten Inhalts der grau markierten Flächen auf.



$$\int_7^{26} (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x + \int_{26}^{42} (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$$

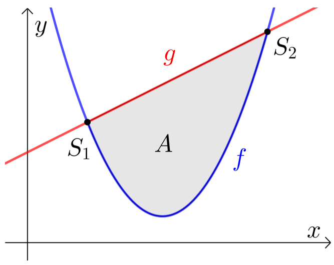
Linear – Quadratisch

Für die rechts dargestellten Funktionen f und g gilt:

$$f(x) = x^2 - 9 \cdot x + 22 \quad \text{bzw.} \quad g(x) = x + 6$$

1) Berechne die Schnittpunkte S_1 und S_2.

2) Berechne den Flächeninhalt A mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.



1) An den Schnittstellen sind die Funktionswerte von f und g gleich:

$$f(x) = g(x) \iff x^2 - 9 \cdot x + 22 = x + 6 \iff \underbrace{x^2 - 10 \cdot x + 16}_{=(x-2)\cdot(x-8)} = 0$$

Die quadratische Lösung hat die beiden Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 8$.

$$f(2) = g(2) = 8 \implies S_1 = (2 \mid 8) \qquad f(8) = g(8) = 14 \implies S_2 = (8 \mid 14)$$

2) Im Intervall $[2; 8]$ gilt: $g(x) \geq f(x)$

$$g(x) - f(x) = (x + 6) - (x^2 - 9 \cdot x + 22) = -x^2 + 10 \cdot x - 16$$

$$A = \int_2^8 (-x^2 + 10 \cdot x - 16)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3} \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 - 16 \cdot x \,\Big|_2^8 = 21{,}33... - (-14{,}66...) = 36$$

Integralgrenzen

Für die rechts dargestellten Funktionen f und g gilt:

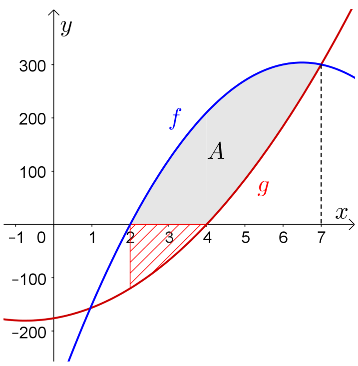
$$f(x) = -15 \cdot x^2 + 195 \cdot x - 330 \quad \text{bzw.} \quad g(x) = 8 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 176$$

Der markierte Flächeninhalt A soll berechnet werden.

1) Lukas rechnet: $\displaystyle\int_2^7 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$

Erkläre, warum er damit *nicht* den Flächeninhalt A berechnet.

2) Berechne den Flächeninhalt A.



1) Lukas berechnet damit den Inhalt einer größeren Fläche (siehe rechts oben).

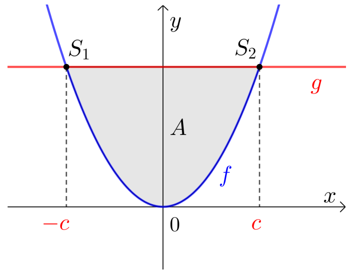
2) $$\int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x = -5 \cdot x^3 + \frac{195}{2} \cdot x^2 - 330 \cdot x \,\Big|_2^7 = 752{,}5 - (-310) = 1062{,}5$$

$$\int_4^7 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3} \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 - 176 \cdot x \,\Big|_4^7 = -23{,}33... - (-437{,}33) = 414$$

$$\implies A = 1062{,}5 - 414 = 648{,}5$$

Umkehraufgabe

Für die rechts dargestellten Funktionen f und g gilt:



$$f(x) = x^2 \quad \text{bzw.} \quad g(x) = c^2 \quad \text{mit } c > 0$$

1) Stelle mithilfe von c eine Formel für die beiden Schnittstellen auf.

2) Berechne die positive Zahl c so, dass die grau markierte Fläche den Inhalt $A = 36$ hat.

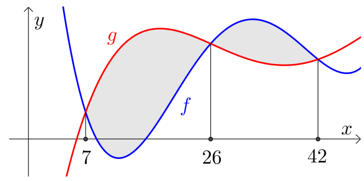
1) $f(x) = g(x) \iff x^2 = c^2 \iff x = c \quad \text{oder} \quad x = -c$

2) $A = 2 \cdot \int_0^c (c^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \left(c^2 \cdot x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^c = 2 \cdot \left(c^3 - \frac{c^3}{3}\right) = \frac{4 \cdot c^3}{3}$

$$A = 36 \iff \frac{4 \cdot c^3}{3} = 36 \iff c^3 = 27 \overset{c \in \mathbb{R}}{\iff} c = 3$$

Betrag

Für den gesamten Inhalt A der rechts grau markierten Flächen gilt:



$$A = \int_7^{26} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x + \int_{26}^{42} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

Die Terme $g(x) - f(x)$ und $f(x) - g(x)$ unterscheiden sich nur um das Vorzeichen.

$5 - 9 = -4 = -(9 - 5)$

$|5 - 9| = 4 = |9 - 5|$

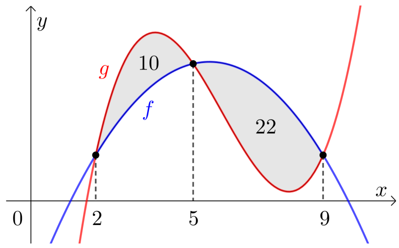
Mithilfe von Betragsstrichen können wir auch kürzere Formeln für A angeben:

$$A = \int_7^{42} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x \qquad \text{bzw.} \qquad A = \int_7^{42} |g(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Diese Schreibweise kann auch bei der Berechnung von A mit Technologieeinsatz weiterhelfen.

Orientierter Flächeninhalt

Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein.



$\int_2^5 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = 10$ $\qquad$ $\int_2^9 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = -12$

$\int_5^9 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = -22$ $\qquad$ $\int_2^9 |g(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x = 32$