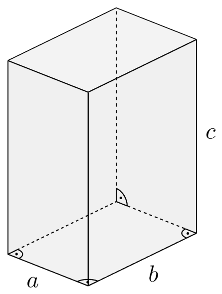
Quader



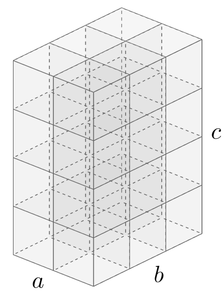
Der dargestellte **Quader** hat die Seitenlängen a, b und c.

Wenn a, b und c natürliche Zahlen sind, dann können wir den Quader in $a \cdot b \cdot c$ Würfel mit Seitenlänge 1 zerlegen.

Für das **Volumen** des Quaders gilt allgemein: $\boldsymbol{V = a \cdot b \cdot c}$

Die **Oberfläche** des Quaders besteht aus 6 Rechtecken:

$$\boldsymbol{O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)}$$



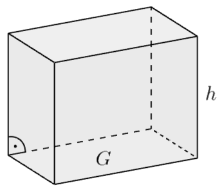
Satz von Cavalieri

Die Münzstapel rechts bestehen beide aus den jeweils 15 gleichen Münzen.
Die Münzen sind jeweils nur verschieden gestapelt.
Das Gesamtvolumen der beiden Münzstapel ist aber gleich.

Der **Satz von Cavalieri** besagt allgemein, dass zwei Körper das gleiche Volumen haben, wenn die Schnittflächen auf *jeder* Höhe jeweils *gleich groß* sind.

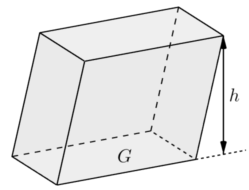
Gerade Körper & Schiefe Körper

Die links und rechts dargestellten Körper haben die gleiche Grundfläche G und die gleiche Höhe h.



Der linke Körper ist **gerade**. Der rechte Körper ist **schief**.

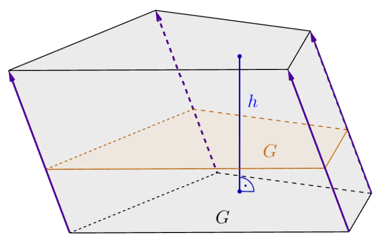
Schneiden wir die beiden Körper parallel zur Grundfläche, dann ist die Schnittfläche auf jeder Höhe gleich groß.



Nach dem Satz von Cavalieri haben sie beide das gleiche **Volumen**: $\boldsymbol{V = G \cdot h}$ „Grundfläche mal Höhe“

Prisma

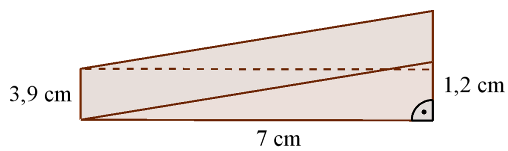
Gegeben ist ein beliebiges Vieleck mit Flächeninhalt G.
Ein **Prisma** entsteht durch starres Parallelverschieben dieses Vielecks.
Die rechts eingezeichneten Pfeile sind also alle parallel und gleich lang.
Jeder Querschnitt parallel zur Grundfläche hat den Flächeninhalt G.
Nach dem Satz von Cavalieri ist das **Volumen** des Prismas gleich groß wie das Volumen eines Quaders mit gleich großer Grundfläche und Höhe:



$$\boldsymbol{V = G \cdot h}$$ „Grundfläche mal Höhe“

Prisma

Der dargestellte prismaförmige Türkeil ist aus Buchenholz mit Dichte $\rho = 720\,\mathrm{kg/m^3}$ hergestellt.
Berechne seine Masse in Gramm.



$$G = \frac{7\,\mathrm{cm} \cdot 1{,}2\,\mathrm{cm}}{2} = 4{,}2\,\mathrm{cm}^2$$

$$V = 4{,}2\,\mathrm{cm}^2 \cdot 3{,}9\,\mathrm{cm} = 16{,}38\,\mathrm{cm}^3 = 16{,}38 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3$$

$$\rho = \frac{m}{V} \implies m = V \cdot \rho = 16{,}38 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3 \cdot 720\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 0{,}011\,79\ldots\,\mathrm{kg} = 11{,}79\ldots\,\mathrm{g}$$

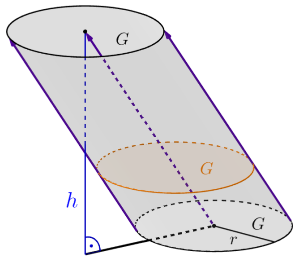
Kreiszylinder

Gegeben ist ein Kreis mit Radius r, also mit Flächeninhalt $G = \pi \cdot r^2$.

Ein **Kreiszylinder** entsteht durch starres Parallelverschieben dieses Kreises.

Nach dem Satz von Cavalieri ist sein **Volumen** gleich groß wie das Volumen eines Quaders mit gleich großer Grundfläche G und Höhe h:

$$\boldsymbol{V = \pi \cdot r^2 \cdot h}$$ „Grundfläche mal Höhe“



Drehzylinder

Rechts ist ein **gerader Kreiszylinder** („**Drehzylinder**“) dargestellt.

Der Mittelpunkt der Deckfläche liegt senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche.

Zur Berechnung der Oberfläche schneiden wir den Mantel auf und wickeln ihn ab.

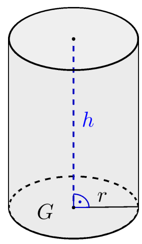
Dabei entsteht ein Rechteck mit Seitenlängen $u = 2 \cdot \pi \cdot r$ und h.

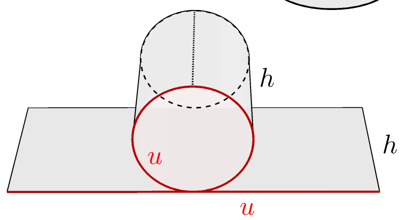
Für die **Mantelfläche** des Drehzylinders gilt also:

$$\boldsymbol{M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h}$$

Für die **Oberfläche** des Drehzylinders gilt also:

$$\boldsymbol{O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h}$$





Drehzylinder vs. Würfel

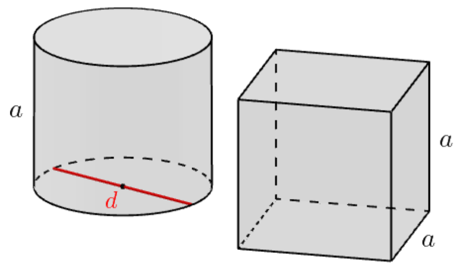
Gegeben sind ein Drehzylinder und ein Würfel mit gleicher Höhe und gleichem Volumen.
Dann muss die Seitenlänge a des Würfels kürzer als der Durchmesser d des Drehzylinders sein.
Um wie viel Prozent ist die Seitenlänge des Würfels kürzer als der Durchmesser des Drehzylinders?

$$a^3 = \pi \cdot r^2 \cdot a \qquad |:a \quad (a > 0)$$

$$a^2 = \pi \cdot r^2 \qquad |\sqrt{\cdot} \quad (a > 0)$$

$$a = \sqrt{\pi} \cdot r = \underbrace{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}_{=0{,}886\ldots} \cdot d$$

$$100\,\% - 88{,}6\ldots\,\% = 11{,}3\ldots\,\%$$



Die Seitenlänge des Würfels ist um 11,3... % kürzer als der Durchmesser des Drehzylinders.

Pyramide

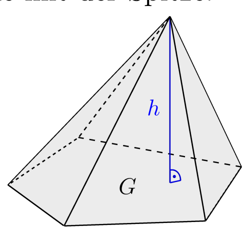
Gegeben sind ein beliebiges Vieleck als Grundfläche und ein Punkt als Spitze.

Eine **Pyramide** entsteht durch direktes Verbinden aller Eckpunkte der Grundfläche mit der Spitze.

Der Mantel einer Pyramide besteht also aus Dreiecken.

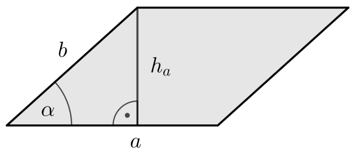
Für das **Volumen** einer Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h gilt:

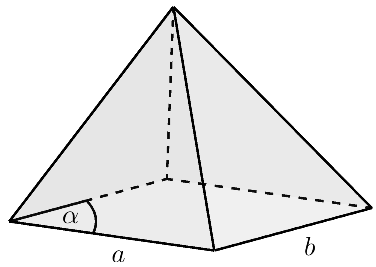
$$\boldsymbol{V = \frac{G \cdot h}{3}}$$ „Grundfläche mal Höhe durch 3“



Pyramide

Die Grundfläche einer Pyramide ist ein Parallelogramm mit $a = 6\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$ und $\alpha = 42°$.
Das Volumen der Pyramide beträgt $40\,\text{cm}^3$.
Berechne die Höhe der Pyramide.





$$\sin(\alpha) = \frac{h_a}{b} \implies h_a = b \cdot \sin(\alpha) = 3{,}34\ldots\,\text{cm}$$

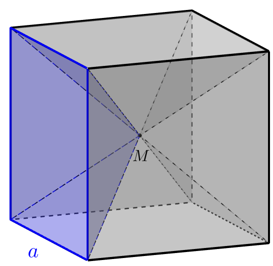
$$G = a \cdot h_a = 20{,}07\ldots\,\text{cm}$$

$$V = \frac{G \cdot h}{3} \implies h = \frac{3 \cdot V}{G} = 5{,}97\ldots\,\text{cm}$$

Die Höhe der Pyramide beträgt $5{,}97\ldots\,\text{cm}$.

Grundfläche mal Höhe durch 3

Gegeben ist ein Würfel mit Seitenlänge a.
Die drei Raumdiagonalen schneiden einander im Mittelpunkt M des Würfels.
Die blau eingezeichnete Pyramide hat eine Seite des Würfels als Grundfläche und M als Spitze.



1) Stelle mithilfe von a und der Volumenformel für Pyramiden eine Formel für das Volumen V dieser Pyramide auf.

2) Stelle – *ohne* Verwendung der Volumenformel für Pyramiden – mithilfe von a eine Formel für das Volumen V dieser Pyramide auf.

3) Zeige, dass **1)** und **2)** tatsächlich das gleiche Ergebnis liefern.

1) $V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{a^2 \cdot \frac{a}{2}}{3}$

2) $V = \frac{a^3}{6}$ (Der Würfel besteht genau aus 6 dieser Pyramiden.)

3) $\frac{a^2 \cdot \frac{a}{2}}{3} = \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{6}$ ✓

Kreiskegel

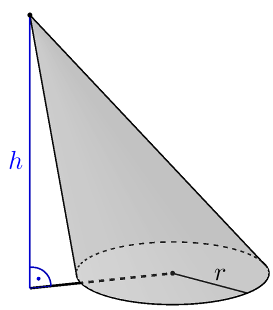
Gegeben sind ein Kreis als Grundfläche und ein Punkt als Spitze.

Ein **Kreiskegel** entsteht durch direktes Verbinden aller Punkte am Kreis mit der Spitze.

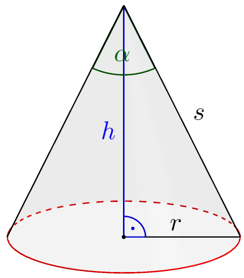
Für das **Volumen** eines Kreiskegels mit Radius r und Höhe h gilt:

$$\boldsymbol{V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}}$$

„Grundfläche mal Höhe durch 3“



Drehkegel



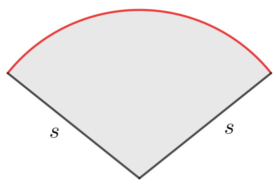
Rechts ist ein **gerader Kreiskegel** („**Drehkegel**") dargestellt.
Seine Spitze liegt senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche.
Bei einem Drehkegel haben alle direkten Verbindungen vom Kreis zur Spitze die gleiche Länge s:

$$\boldsymbol{s = \sqrt{h^2 + r^2}}$$

Diese Strecken heißen dann auch **Erzeugende** des Kreiskegels.

Für den **Öffnungswinkel** $\boldsymbol{\alpha}$ gilt: $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{h} \implies \boldsymbol{\alpha = 2 \cdot \arctan\left(\frac{r}{h}\right)}$

Zur Berechnung der Oberfläche schneiden wir den Mantel auf und wickeln ihn in der Ebene ab:



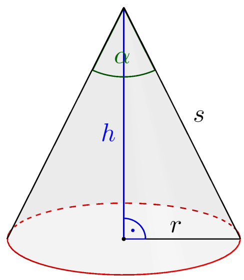
Dabei entsteht ein Kreissektor mit Radius s und Bogenlänge $2 \cdot \pi \cdot r$.

Für den Flächeninhalt jedes Kreissektors gilt:
„Flächeninhalt = Radius mal Bogenlänge durch 2" Rechne nach.

Für die **Mantelfläche** des Drehkegels gilt also: $\boldsymbol{M = \pi \cdot r \cdot s}$

Für die **Oberfläche** des Drehkegels gilt also: $\boldsymbol{O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s}$

Drehkegel



Im rechts dargestellten Drehkegel gilt $\alpha = 58°$ und $s = 6\,\text{cm}$.
Berechne das Volumen und die Oberfläche des Drehkegels.

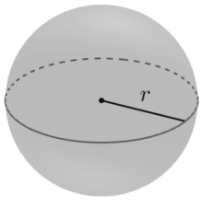
$$\sin(29°) = \frac{r}{s} \implies r = s \cdot \sin(29°) = 2{,}90...\,\text{cm}$$

$$\cos(29°) = \frac{h}{s} \implies h = s \cdot \cos(29°) = 5{,}24...\,\text{cm}$$

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = 46{,}4...\,\text{cm}^3$$

$$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s = 81{,}4...\,\text{cm}^2$$

Kugel



Rechts ist eine **Kugel** mit Radius r dargestellt.
Jeder Punkt auf der Kugel hat den Abstand r vom Mittelpunkt.

Für das **Volumen** des Kugelkörpers gilt: $\boldsymbol{V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}$

Für die **Oberfläche** der Kugel gilt: $\boldsymbol{O = 4 \cdot \pi \cdot r^2}$

Kugel

Die Erde ist näherungsweise eine Kugel mit Radius $r = 6371\,\text{km}$.

1) Berechne die Erdoberfläche O. Trage die richtigen Ziffern in die Kästchen ein.

$$O = 5{,}10... \cdot 10^{8}\,\text{km}^2$$

2) 71 % der Erdoberfläche sind mit Wasser bedeckt.
Berechne die mit Wasser bedeckte Fläche W in Millionen km^2.

$$W = 362{,}1...\ \text{Millionen km}^2$$