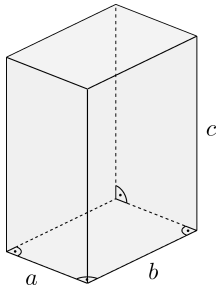
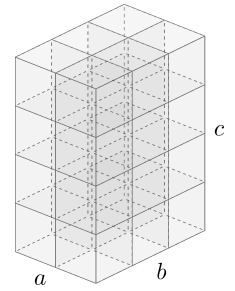



Quader  Σ \int Π \sin **MmF**



Der dargestellte **Quader** hat die Seitenlängen a , b und c .
 Wenn a , b und c **natürliche Zahlen** sind, dann können wir den Quader in $a \cdot b \cdot c$ Würfel mit Seitenlänge 1 zerlegen.
 Für das **Volumen** des Quaders gilt allgemein: $V = a \cdot b \cdot c$
 Die **Oberfläche** des Quaders besteht aus 6 Rechtecken:
 $O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$



Satz von Cavalieri  **MmF**

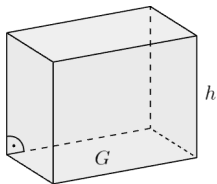
Die Münzstapel rechts bestehen beide aus den jeweils 15 gleichen Münzen.
 Die Münzen sind jeweils nur verschieden gestapelt.
 Das Gesamtvolumen der beiden Münzstapel ist aber gleich.



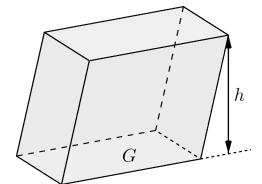
Der **Satz von Cavalieri** besagt allgemein, dass zwei Körper das gleiche Volumen haben, wenn die Schnittflächen auf *jeder* Höhe jeweils *gleich groß* sind.

Gerade Körper & Schiefe Körper  **MmF**


Die links und rechts dargestellten Körper haben die gleiche Grundfläche G und die gleiche Höhe h .



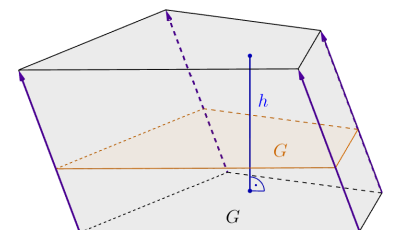
Der linke Körper ist **gerade**. Der rechte Körper ist **schief**.
 Schneiden wir die beiden Körper parallel zur Grundfläche, dann ist die Schnittfläche auf jeder Höhe gleich groß.



Nach dem Satz von Cavalieri haben sie beide das gleiche **Volumen**: $V = G \cdot h$ „Grundfläche mal Höhe“

Prisma  Σ \int Π \sin **MmF**

Gegeben ist ein beliebiges **Vieleck** mit Flächeninhalt G .
 Ein **Prisma** entsteht durch starres Parallelverschieben dieses Vielecks.
 Die rechts eingezeichneten **Pfeile** sind also alle parallel und gleich lang.
 Jeder Querschnitt parallel zur Grundfläche hat den Flächeninhalt G .
 Nach dem Satz von Cavalieri ist das **Volumen** des Prismas gleich groß wie das Volumen eines Quaders mit gleich großer Grundfläche und Höhe:



$V = G \cdot h$ „Grundfläche mal Höhe“

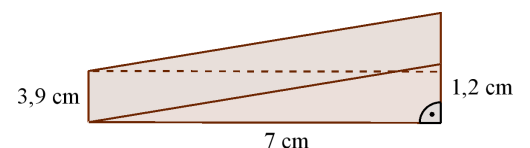
Prisma  **MmF**

Der dargestellte prismaförmige Türkeil ist aus Buchenholz mit Dichte $\rho = 720 \text{ kg/m}^3$ hergestellt. Berechne seine Masse in Gramm.

$G = \frac{7 \text{ cm} \cdot 1,2 \text{ cm}}{2} = 4,2 \text{ cm}^2$

$V = 4,2 \text{ cm}^2 \cdot 3,9 \text{ cm} = 16,38 \text{ cm}^3 = 16,38 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$

$\rho = \frac{m}{V} \implies m = V \cdot \rho = 16,38 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot 720 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0,01179... \text{ kg} = 11,79... \text{ g}$



Kreiszylinder



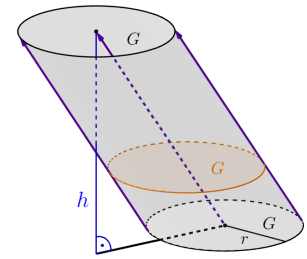
MmF

Gegeben ist ein Kreis mit Radius r , also mit Flächeninhalt $G = \pi \cdot r^2$.

Ein **Kreiszylinder** entsteht durch starres Parallelverschieben dieses Kreises.

Nach dem Satz von Cavalieri ist sein **Volumen** gleich groß wie das Volumen eines Quaders mit gleich großer Grundfläche G und Höhe h :

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad \text{„Grundfläche mal Höhe“}$$



Drehzylinder



MmF

Rechts ist ein **gerader Kreiszylinder** („**Drehzylinder**“) dargestellt.

Der Mittelpunkt der Deckfläche liegt senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche.

Zur Berechnung der Oberfläche schneiden wir den Mantel auf und wickeln ihn ab.

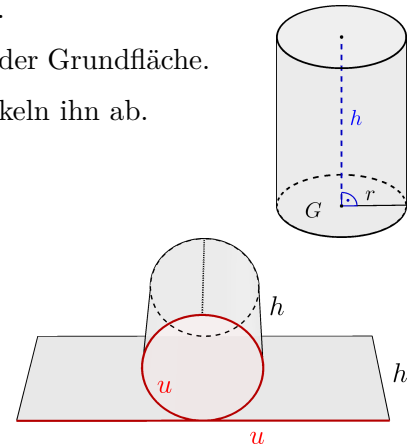
Dabei entsteht ein Rechteck mit Seitenlängen $u = 2 \cdot \pi \cdot r$ und h .

Für die **Mantelfläche** des Drehzylinders gilt also:

$$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

Für die **Oberfläche** des Drehzylinders gilt also:

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$



Drehzylinder vs. Würfel



MmF

Gegeben sind ein Drehzylinder und ein Würfel mit gleicher Höhe und gleichem Volumen.

Dann muss die Seitenlänge a des Würfels kürzer als der Durchmesser d des Drehzylinders sein.

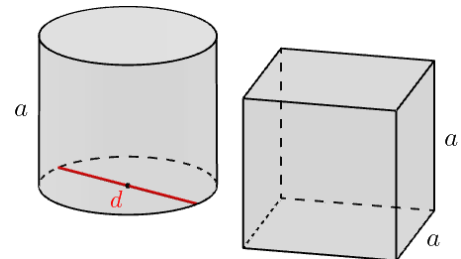
Um wie viel Prozent ist die Seitenlänge des Würfels kürzer als der Durchmesser des Drehzylinders?

$$a^3 = \pi \cdot r^2 \cdot a \quad | : a \quad (a > 0)$$

$$a^2 = \pi \cdot r^2 \quad | \sqrt{\cdot} \quad (a > 0)$$

$$a = \sqrt{\pi} \cdot r = \underbrace{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}_{=0,886...} \cdot d$$

$$100\% - 88,6... \% = 11,3... \%$$



Die Seitenlänge des Würfels ist um 11,3... % kürzer als der Durchmesser des Drehzylinders.

Pyramide



MmF

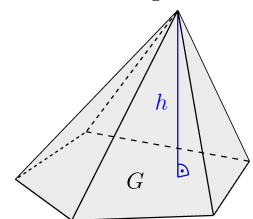
Gegeben sind ein beliebiges Vieleck als Grundfläche und ein Punkt als Spitze.

Eine **Pyramide** entsteht durch direktes Verbinden aller Eckpunkte der Grundfläche mit der Spitze.

Der Mantel einer Pyramide besteht also aus Dreiecken.

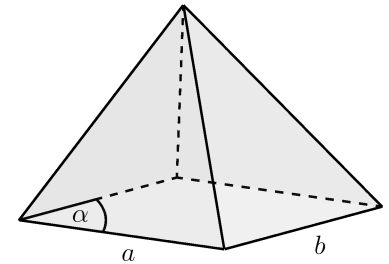
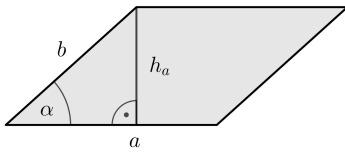
Für das **Volumen** einer Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h gilt:

$$V = \frac{G \cdot h}{3} \quad \text{„Grundfläche mal Höhe durch 3“}$$



Pyramide 

Die Grundfläche einer Pyramide ist ein Parallelogramm mit $a = 6\text{ cm}$, $b = 5\text{ cm}$ und $\alpha = 42^\circ$.
 Das Volumen der Pyramide beträgt 40 cm^3 .
 Berechne die Höhe der Pyramide.




$$\sin(\alpha) = \frac{h_a}{b} \implies h_a = b \cdot \sin(\alpha) = 3,34... \text{ cm}$$

$$G = a \cdot h_a = 20,07... \text{ cm}$$

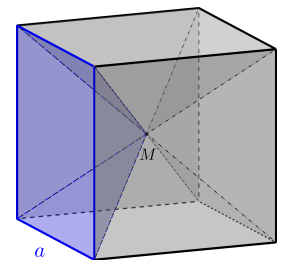
$$V = \frac{G \cdot h}{3} \implies h = \frac{3 \cdot V}{G} = 5,97... \text{ cm}$$

Die Höhe der Pyramide beträgt $5,97... \text{ cm}$.

Grundfläche mal Höhe durch 3 

Gegeben ist ein Würfel mit Seitenlänge a .
 Die drei Raumdiagonalen schneiden einander im Mittelpunkt M des Würfels.
 Die blau eingezeichnete Pyramide hat eine Seite des Würfels als Grundfläche und M als Spitze.

- 1) Stelle mithilfe von a und der Volumenformel für Pyramiden eine Formel für das Volumen V dieser Pyramide auf.
- 2) Stelle – ohne Verwendung der Volumenformel für Pyramiden – mithilfe von a eine Formel für das Volumen V dieser Pyramide auf.
- 3) Zeige, dass 1) und 2) tatsächlich das gleiche Ergebnis liefern.



$$1) V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{a^2 \cdot \frac{a}{2}}{3}$$

$$2) V = \frac{a^3}{6} \quad (\text{Der Würfel besteht genau aus 6 dieser Pyramiden.})$$

$$3) \frac{a^2 \cdot \frac{a}{2}}{3} = \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{6} \quad \checkmark$$

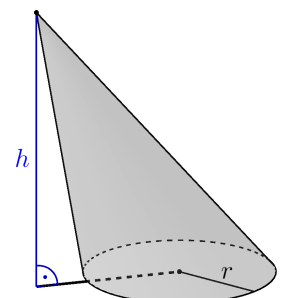
Kreiskegel 

Gegeben sind ein Kreis als Grundfläche und ein Punkt als Spitze.

Ein **Kreiskegel** entsteht durch direktes Verbinden aller Punkte am Kreis mit der Spitze.

Für das **Volumen** eines Kreiskegels mit Radius r und Höhe h gilt:

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \quad \text{„Grundfläche mal Höhe durch 3“}$$



Drehkegel



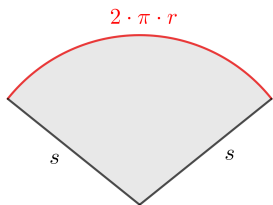
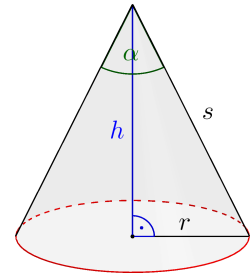
MmF

Rechts ist ein **gerader Kreiskegel** („Drehkegel“) dargestellt.
Seine Spitze liegt senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche.
Bei einem Drehkegel haben alle direkten Verbindungen vom Kreis zur Spitze die gleiche Länge s :

$$s = \sqrt{h^2 + r^2} \quad \text{Diese Strecken heißen dann auch **Erzeugende** des Kreiskegels.}$$

Für den **Öffnungswinkel** α gilt: $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{h} \implies \alpha = 2 \cdot \arctan\left(\frac{r}{h}\right)$

Zur Berechnung der Oberfläche schneiden wir den Mantel auf und wickeln ihn in der Ebene ab:



Dabei entsteht ein **Kreis Sektor** mit Radius s und Bogenlänge $2 \cdot \pi \cdot r$.

Für den Flächeninhalt jedes Kreissectors gilt:
„Flächeninhalt = Radius mal Bogenlänge durch 2“

Rechne nach.

Für die **Mantelfläche** des Drehkegels gilt also: $M = \pi \cdot r \cdot s$

Für die **Oberfläche** des Drehkegels gilt also: $O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$

Drehkegel



MmF

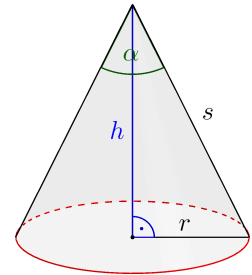
Im rechts dargestellten Drehkegel gilt $\alpha = 58^\circ$ und $s = 6 \text{ cm}$.
Berechne das Volumen und die Oberfläche des Drehkegels.

$$\sin(29^\circ) = \frac{r}{s} \implies r = s \cdot \sin(29^\circ) = 2,90... \text{ cm}$$

$$\cos(29^\circ) = \frac{h}{s} \implies h = s \cdot \cos(29^\circ) = 5,24... \text{ cm}$$

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = 46,4... \text{ cm}^3$$

$$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s = 81,4... \text{ cm}^2$$



Kugel

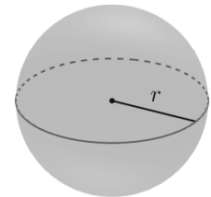


MmF

Rechts ist eine **Kugel** mit Radius r dargestellt.
Jeder Punkt auf der Kugel hat den Abstand r vom Mittelpunkt.

Für das **Volumen** des Kugelkörpers gilt: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Für die **Oberfläche** der Kugel gilt: $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$



Kugel



MmF

Die Erde ist näherungsweise eine Kugel mit Radius $r = 6371 \text{ km}$.

1) Berechne die Erdoberfläche O . Trage die richtigen Ziffern in die Kästchen ein.

$$O = 5,10... \cdot 10^8 \text{ km}^2$$

2) 71 % der Erdoberfläche sind mit Wasser bedeckt.
Berechne die mit Wasser bedeckte Fläche W in Millionen km^2 .

$$W = 362,1... \text{ Millionen km}^2$$

