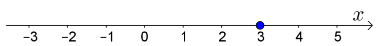
Gleichungen in 1 Variable

In der Gleichung $4 \cdot x + 2 = 14$ kommt *eine* Variable vor, nämlich x.

1) Zeige durch Einsetzen, dass die Zahl 5 *keine* Lösung dieser Gleichung ist.

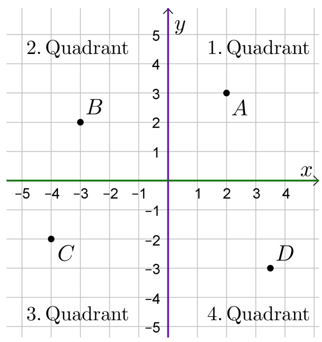
2) Zeige durch Einsetzen, dass die Zahl 3 eine Lösung dieser Gleichung ist.

3) Zeige mithilfe von Äquivalenzumformungen, dass die Zahl 3 die *einzige* Lösung der Gleichung ist.



Kartesisches Koordinatensystem

Rechts siehst du, wie die **Zahlenebene** durch 2 Achsen in 4 Quadranten unterteilt wird.



Die **waagrechte Achse** heißt auch x-Achse, horizontale Achse, 1. Achse oder Abszisse.

Die **senkrechte Achse** heißt auch y-Achse, vertikale Achse, 2. Achse oder Ordinate.

Jeder Punkt in der Zahlenebene wird eindeutig durch Angabe seiner beiden **Koordinaten** festgelegt. Zum Beispiel:

$$A = (2 \mid 3) \quad B = (-3 \mid 2) \quad C = (-4 \mid -2) \quad D = (3{,}5 \mid -3)$$

Die Menge aller Zahlenpaare $(x \mid y)$ mit reellen Zahlen x und y wird mit $\mathbb{R}^2$ abgekürzt.

Lineare Gleichungen in 2 Variablen

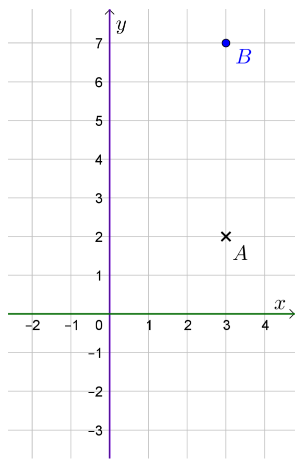
In der Gleichung $-2 \cdot x + y = 1$ kommen *zwei* Variablen vor, nämlich x und y.

Die Gleichung $-2 \cdot x + y = 1$ ist eine Bedingung an die Zahlen x und y.

Wir suchen nach **Zahlenpaaren**, die diese Bedingung erfüllen:

$A = (3 \mid 2)$ ist *keine* Lösung der Gleichung, weil $-2 \cdot 3 + 2 \neq 1$. ✗

$B = (3 \mid 7)$ ist eine **Lösung** der Gleichung, weil $-2 \cdot 3 + 7 = 1$. ✓



In einer **Wertetabelle** tragen wir weitere Lösungen der Gleichung ein. Ergänze die Koordinaten so, dass die Zahlenpaare Lösungen sind.

x	-2	-1	0	1	2	
y						6

Zeichne diese Lösungen als Punkte im Koordinatensystem rechts ein.

Tatsächlich hat jede **lineare Gleichung** $\boldsymbol{a \cdot x + b \cdot y = c}$ *unendlich* viele Lösungen, und die Lösungen liegen auf einer Gerade. $(a \mid b) \neq (0 \mid 0)$

Mehr dazu findest du auf dem Arbeitsblatt – Geradengleichungen.

Gleichungssysteme MmF

Ein **Gleichungssystem** besteht aus mehreren Gleichungen, zum Beispiel:

$$\mathrm{I}:\ x + y = 5$$
$$\mathrm{II}:\ 2 \cdot x - 3 \cdot y = 0$$

Dieses Gleichungssystem besteht aus 2 Gleichungen mit insgesamt 2 Variablen x und y. Da I und II jeweils lineare Gleichungen sind, ist es ein **lineares Gleichungssystem**.

Jedes Zahlenpaar, das eine Lösung *aller* Gleichungen ist, heißt **Lösung des Gleichungssystems**:

Das Zahlenpaar $(4 \mid 1)$ ist eine Lösung von I, aber *keine* Lösung von II. $4+1=5$ ✓ $2\cdot 4 - 3\cdot 1 \neq 0$ ✗
Das Zahlenpaar $(4 \mid 1)$ ist also *keine* Lösung dieses Gleichungssystems.

Das Zahlenpaar $(3 \mid 2)$ ist eine Lösung von beiden Gleichungen I und II. $3+2=5$ ✓ $2\cdot 3 - 3\cdot 2 = 0$ ✓
Das Zahlenpaar $(3 \mid 2)$ ist also eine Lösung dieses Gleichungssystems. Gibt es weitere Lösungen?

Eliminationsverfahren MmF

Jedes *lineare* Gleichungssystem in 2 Variablen kannst du mit dem **Eliminationsverfahren** lösen:

$$\mathrm{I}:\ x + y = 5$$
$$\mathrm{II}:\ 2 \cdot x - 3 \cdot y = 0$$

1) Suche dir eine der beiden Variablen x oder y aus. Bei der folgenden Rechnung wählen wir y aus. Multipliziere I bzw. II jeweils so, dass die **Koeffizienten** von y bis auf das Vorzeichen gleich sind:

$$3\cdot\mathrm{I}:\ 3 \cdot x + 3 \cdot y = 15$$
$$1\cdot\mathrm{II}:\ 2 \cdot x - 3 \cdot y = 0$$

Diese Multiplikationen sind Äquivalenzumformungen.
Sie verändern also *nicht* die Lösungen der Gleichungen.

2) Addiere die beiden Gleichungen, um die ausgewählte Variable zu *eliminieren*:

$$5 \cdot x + 0 \cdot y = 15$$

Warum darf man einfach die Gleichungen addieren?

Aus $A = B$ und $C = D$ folgt, dass $A = B$ und $A + C = B + D$ gilt.
Aus $A = B$ und $A + C = B + D$ folgt, dass $A = B$ und $C = D$ gilt.

Das Gleichungssystem $\{A = B,\ C = D\}$ hat also die gleichen Lösungen wie das Gleichungssystem $\{A = B,\ A + C = B + D\}$.

3) Löse die Gleichung in einer Variable:

$$5 \cdot x = 15 \qquad \mid :5$$
$$x = 3$$

4) Setze in I oder II ein, um die zugehörige y-Koordinate der Lösung zu berechnen:

$$\xRightarrow{\mathrm{I}}\ 3 + y = 5 \qquad \mid -3$$
$$y = 2$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat also genau eine Lösung, nämlich das Zahlenpaar $(x \mid y) = (3 \mid 2)$.

Eliminationsverfahren MmF

Löse das Gleichungssystem mit dem Eliminationsverfahren.

$$\mathrm{I}:\ 3 \cdot x + 4 \cdot y = -9$$
$$\mathrm{II}:\ 2 \cdot x - 5 \cdot y = 17$$

Einsetzungsverfahren

Jedes *lineare* Gleichungssystem in 2 Variablen kannst du mit dem **Einsetzungsverfahren** lösen:

1) Suche dir eine der beiden Gleichungen und eine der beiden Variablen x oder y aus.
Forme die Gleichung nach dieser Variable um:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: \ & x + y = 5 \qquad \Longrightarrow y = 5 - x \quad (\star) \\ \mathrm{II}: \ & 2 \cdot x - 3 \cdot y = 0 \end{aligned}$$

2) *Setze* in die andere Gleichung *ein* und löse diese Gleichung in einer Variable:

$$\begin{aligned} \overset{\mathrm{II}}{\Longrightarrow} \ 2 \cdot x - 3 \cdot (5 - x) &= 0 \\ 2 \cdot x - 15 + 3 \cdot x &= 0 \\ 5 \cdot x &= 15 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

3) Setze in $(\star)$ ein, um die zugehörige y-Koordinate zu berechnen:

$$\overset{(\star)}{\Longrightarrow} \ y = 5 - 3 = 2$$

Das lineare Gleichungssystem hat also genau eine Lösung, nämlich das Zahlenpaar $(x \mid y) = (3 \mid 2)$.

Einsetzungsverfahren

Löse das Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren.

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: \ & 3 \cdot x + 4 \cdot y = -9 \\ \mathrm{II}: \ & 2 \cdot x - 5 \cdot y = 17 \end{aligned}$$

Zahlenrätsel

Die Summe von zwei positiven Zahlen x und y ist doppelt so groß wie ihre Differenz $x - y$.
Die größere Zahl x ist um 6 größer als das Doppelte der kleineren Zahl y.
Berechne die beiden Zahlen.

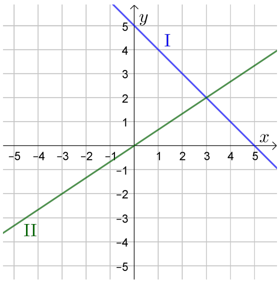
Lineares Gleichungssystem – Lösungsfälle

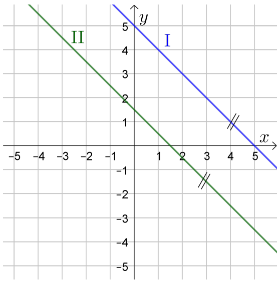
Die Lösungen jeder *linearen* Gleichung in zwei Variablen liegen auf einer Gerade in der Zahlenebene. Für *lineare* Gleichungssysteme mit 2 Gleichungen und 2 Variablen gibt es also folgende 3 Lösungsfälle:

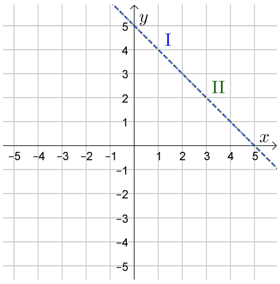
a) $\text{I}: \; x + y = 5$
$\text{II}: \; 2 \cdot x - 3 \cdot y = 0$

b) $\text{I}: \; x + y = 5$
$\text{II}: \; 2 \cdot x + 2 \cdot y = 3$

c) $\text{I}: \; x + y = 5$
$\text{II}: \; 2 \cdot x + 2 \cdot y = 10$





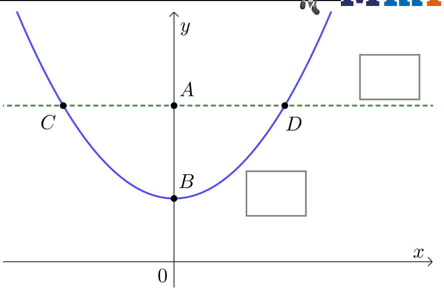


Die Lösung $(x \mid y) = (3 \mid 2)$ von **a)** haben wir bereits berechnet. Zeichne sie links oben ein.
Versuche **b)** und **c)** mit dem Eliminationsverfahren oder Einsetzungsverfahren zu lösen. Was passiert?

Nichtlineares Gleichungssystem

Das folgende Gleichungssystem ist *nicht* linear:

$\text{I}: \; x^2 = y - 17$
$\text{II}: \; y - 42 = 0$



Die Lösungen der Gleichung I und die Lösungen der Gleichung II sind rechts grafisch dargestellt.

1) Trage I bzw. II richtig in die Kästchen ein.

2) Berechne die Schnittpunkte A und B auf der y-Achse.

3) Löse das Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren. Berechne die Schnittpunkte C und D.