Lineare Gleichungen

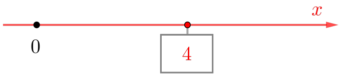
1) Wir betrachten die lineare Gleichung $3 \cdot x = 12$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$.
Ihre Lösung ist ein *Punkt* auf der Zahlen*gerade*.

2) Wir betrachten die lineare Gleichung $3 \cdot x + 6 \cdot y = 12$ über der Grundmenge $\mathbb{R}^2$.
Ihre Lösungen $(x \mid y)$ – zum Beispiel $(2 \mid 1)$ – bilden zusammen eine *Gerade* in der Zahlen*ebene*.

3) Wir betrachten die lineare Gleichung $3 \cdot x + 6 \cdot y + 4 \cdot z = 12$ über der Grundmenge $\mathbb{R}^3$.
Ihre Lösungen $(x \mid y \mid z)$ – zum Beispiel $(2 \mid -1 \mid 3)$ – bilden zusammen eine *Ebene* im Zahlen*raum*.

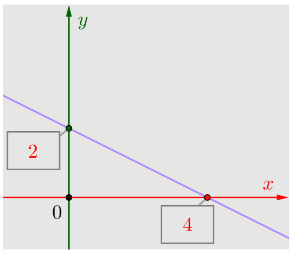
Lineare Gleichungen

1) Die Lösung von $3 \cdot x = 12$ ist unten als Punkt auf der x-Achse markiert.
Berechne die Lösung und trage sie in das Kästchen ein.



$3 \cdot x = 12 \iff x = 4$

2) Die Lösungen von $3 \cdot x + 6 \cdot y = 12$ sind unten als Gerade in der Zahlenebene dargestellt.
Berechne die Schnittpunkte mit den Achsen und trage die Koordinaten in die Kästchen ein.



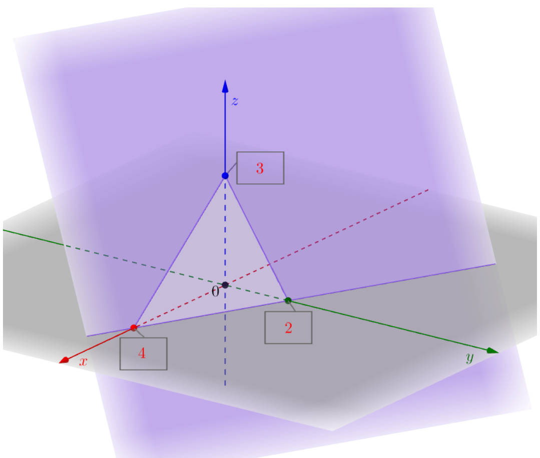
Schnittpunkt mit x-Achse: $S_x = (x \mid 0)$

$3 \cdot x = 12 \iff x = 4$

Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y = (0 \mid y)$

$6 \cdot y = 12 \iff y = 2$

3) Die Lösungen von $3 \cdot x + 6 \cdot y + 4 \cdot z = 12$ sind unten als Ebene im Zahlenraum dargestellt.
Berechne die Schnittpunkte mit den Achsen und trage die Koordinaten in die Kästchen ein.



Schnittpunkt mit x-Achse: $S_x = (x \mid 0 \mid 0)$

$3 \cdot x = 12 \iff x = 4$

Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y = (0 \mid y \mid 0)$

$6 \cdot y = 12 \iff y = 2$

Schnittpunkt mit z-Achse: $S_z = (0 \mid 0 \mid z)$

$4 \cdot z = 12 \iff z = 3$

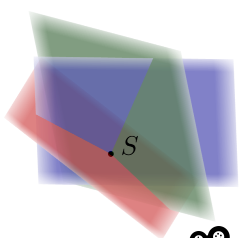
Lagebeziehung dreier Ebenen

Wenn zwei Ebenen weder parallel noch ident sind, dann schneiden sie einander in einer Gerade.

Wenn eine dritte Ebene weder parallel zu dieser Gerade ist, noch diese enthält, dann schneidet die dritte Ebene diese Gerade in *genau einem* Punkt.

In diesem Fall haben die 3 Ebenen also *genau einen* gemeinsamen Schnittpunkt S.

Im Bild rechts ist diese Lagebeziehung dargestellt.



In allen anderen Fällen gibt es entweder keine oder unendlich viele gemeinsame Schnittpunkte.
Auf diesem Arbeitsblatt beschränken wir uns beim Berechnen auf den „Normalfall“ eines eindeutigen Schnittpunkts.

Eliminationsverfahren

Rechts ist ein *lineares* Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen angegeben.

Solche Gleichungssysteme kannst du mit dem **Eliminationsverfahren** in 3 Schritten lösen:

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{I}: & x + 2\cdot y - 3\cdot z &=& 6 \\ \mathrm{II}: & 2\cdot x - 3\cdot y + z &=& 5 \\ \mathrm{III}: & -3\cdot x + y - 2\cdot z &=& -3 \end{array}$$

1) Suche eine der 3 Gleichungen und eine der Variablen in dieser Gleichung aus. Verwende diese Gleichung, um die gewählte Variable in beiden anderen Gleichungen zu *eliminieren* (siehe unten).

2) Löse das erhaltene lineare Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Variablen.

3) Berechne die 3. Koordinate der Lösung durch Einsetzen in I, II oder III.

---

1) Bei der folgenden Rechnung wählen wir die Gleichung I und die Variable x aus:

$$\begin{array}{rrcl} -2\cdot\mathrm{I}: & -2\cdot x - 4\cdot y + 6\cdot z &=& -12 \\ \mathrm{II}: & 2\cdot x - 3\cdot y + z &=& 5 \\ \hline -2\cdot\mathrm{I}+\mathrm{II}: & -7\cdot y + 7\cdot z &=& -7 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} 3\cdot\mathrm{I}: & 3\cdot x + 6\cdot y - 9\cdot z &=& 18 \\ \mathrm{III}: & -3\cdot x + y - 2\cdot z &=& 3 \\ \hline 3\cdot\mathrm{I}+\mathrm{III}: & 7\cdot y - 11\cdot z &=& 15 \end{array}$$

2) Wir lösen das erhaltene Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Variablen:

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{II}^*: & -7\cdot y + 7\cdot z &=& -7 \\ \mathrm{III}^*: & 7\cdot y - 11\cdot z &=& 15 \\ \hline \mathrm{II}^*+\mathrm{III}^*: & -4\cdot z &=& 8 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad z = -2$$

$$\overset{\mathrm{II}^*}{\Longrightarrow} \quad -7\cdot y + 7\cdot(-2) = -7 \quad \Longrightarrow \quad -7\cdot y = 7 \quad \Longrightarrow \quad y = -1$$

3) Wir setzen in I ein, um die zugehörige x-Koordinate der Lösung zu berechnen:

$$\overset{\mathrm{I}}{\Longrightarrow} \quad x + 2\cdot(-1) - 3\cdot(-2) = 6 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat also genau eine Lösung, nämlich $(x \mid y \mid z) = (2 \mid -1 \mid -2)$.
Die 3 Ebenen I, II und III schneiden einander also im Punkt $S = (2 \mid -1 \mid -2)$.

Sonderfälle

Wenn *nicht* alle Variablen in allen Gleichungen vorkommen, ist Schritt **1)** einfacher:

- Im linearen Gleichungssystem rechts kommt die Variable y nur in einer einzigen Gleichung vor.

  Schritt **1)** ist also bereits erledigt.

  Löse in Schritt **2)** das Gleichungssystem {I, II} mit 2 Gleichungen und 2 Variablen.

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{I}: & x - 3\cdot z &=& -5 \\ \mathrm{II}: & -3\cdot x + 2\cdot z &=& 1 \\ \mathrm{III}: & 2\cdot x - 3\cdot y + 5\cdot z &=& 21 \end{array}$$

- Im linearen Gleichungssystem rechts kommt die Variable z nur in 2 Gleichungen vor.

  Eliminiere mit Gleichung II die Variable z auch aus Gleichung III, um eine zweite Gleichung III* ohne z zu erhalten. Damit ist Schritt **1)** erledigt.

  Löse in Schritt **2)** das Gleichungssystem {I, III*} mit 2 Gleichungen und 2 Variablen.

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{I}: & 4\cdot x + 3\cdot y &=& 6 \\ \mathrm{II}: & 2\cdot x - 2\cdot y + 3\cdot z &=& 13 \\ \mathrm{III}: & -3\cdot x + 4\cdot y - 2\cdot z &=& -19 \end{array}$$

Einsetzungsverfahren

Rechts ist ein *lineares* Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen angegeben.

Solche Gleichungssysteme kannst du mit dem **Einsetzungsverfahren** in 3 Schritten lösen:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: &\quad x + 2\cdot y - 3\cdot z = 6 \\ \mathrm{II}: &\quad 2\cdot x - 3\cdot y + z = 5 \\ \mathrm{III}: &\quad -3\cdot x + y - 2\cdot z = -3 \end{aligned}$$

1) Suche dir eine der 3 Gleichungen und eine der Variablen aus.
Forme die Gleichung nach dieser Variable um.
Setze in die anderen beiden Gleichungen *ein*, und vereinfache so weit wie möglich.

2) Löse das erhaltene lineare Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Variablen.

3) Berechne die 3. Koordinate der Lösung durch Einsetzen in die Gleichung aus Schritt **1)**.

---

1) Bei der folgenden Rechnung wählen wir die Gleichung I und die Variable x aus:

$$\overset{\mathrm{I}}{\Longrightarrow} \quad x = 6 - 2\cdot y + 3\cdot z \quad (\star)$$

$$\begin{aligned} \overset{\mathrm{II}}{\Longrightarrow} \quad 2\cdot(6 - 2\cdot y + 3\cdot z) - 3\cdot y + z &= 5 \\ 12 - 4\cdot y + 6\cdot z - 3\cdot y + z &= 5 \\ -7\cdot y + 7\cdot z &= -7 \\ y - z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\mathrm{III}}{\Longrightarrow} \quad -3\cdot(6 - 2\cdot y + 3\cdot z) + y - 2\cdot z &= -3 \\ -18 + 6\cdot y - 9\cdot z + y - 2\cdot z &= -3 \\ 7\cdot y - 11\cdot z &= 15 \end{aligned}$$

2) Wir lösen das erhaltene Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Variablen:

$$\begin{aligned} \mathrm{II}^*: &\quad y - z = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = 1 + z \quad (\star\star) \\ \mathrm{III}^*: &\quad 7\cdot y - 11\cdot z = 15 \end{aligned}$$

$$\overset{\mathrm{III}^*}{\Longrightarrow} \quad 7\cdot(1+z) - 11\cdot z = 15 \quad \Longrightarrow \quad 7 + 7\cdot z - 11\cdot z = 15 \quad \Longrightarrow \quad -4\cdot z = 8 \quad \Longrightarrow \quad z = -2$$

$$\overset{(\star\star)}{\Longrightarrow} \quad y = 1 + (-2) = -1$$

3) Wir setzen in $(\star)$ ein, um die zugehörige x-Koordinate der Lösung zu berechnen:

$$\overset{(\star)}{\Longrightarrow} \quad x = 6 - 2\cdot(-1) + 3\cdot(-2) = 2$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat also genau eine Lösung, nämlich $(x \mid y \mid z) = (2 \mid -1 \mid -2)$.

Lineare Gleichungssysteme mit mehreren Variablen

Jedes lineare Gleichungssystem mit 4 Gleichungen und 4 Variablen, das eine eindeutige Lösung hat, können wir genauso mit den gleichen Verfahren lösen:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: &\quad 2\cdot a - 3\cdot b + c - d = 15 \\ \mathrm{II}: &\quad a + b - 2\cdot c + 4\cdot d = -3 \\ \mathrm{III}: &\quad -3\cdot a + b - 3\cdot c + 2\cdot d = -21 \\ \mathrm{IV}: &\quad 2\cdot a - 4\cdot b + c - d = 17 \end{aligned}$$

1) Erzeuge aus dem linearen Gleichungssystem mit 4 Gleichungen und 4 Variablen ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen.

Suche dafür eine Gleichung und eine der Variablen aus.
Verwende diese Gleichung, um die gewählte Variable in den anderen 3 Gleichungen zu eliminieren.

2) Löse das lineare Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen.

3) Berechne die 4. Koordinate der Lösung durch Einsetzen in I, II, III oder IV.

Lineares Gleichungssystem in 3 Variablen

Löse das lineare Gleichungssystem. Verwende dafür das Einsetzungsverfahren und/oder das Eliminationsverfahren.

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: \quad & 3\cdot x + y - 3\cdot z = 10 \implies y = 10 - 3\cdot x + 3\cdot z \\ \mathrm{II}: \quad & x - 3\cdot y + z = 10 \\ \mathrm{III}: \quad & -3\cdot x - 2\cdot y + 2\cdot z = -8 \end{aligned}$$

1) Einsetzungsverfahren:

$$\overset{\mathrm{II}}{\implies} x - 3\cdot(10 - 3\cdot x + 3\cdot z) + z = 10 \qquad \overset{\mathrm{III}}{\implies} -3\cdot x - 2\cdot(10 - 3\cdot x + 3\cdot z) + 2\cdot z = -8$$

$$x - 30 + 9\cdot x - 9\cdot z + z = 10 \qquad -3\cdot x - 20 + 6\cdot x - 6\cdot z + 2\cdot z = -8$$

$$\mathrm{II}^*: 10\cdot x - 8\cdot z = 40 \qquad \mathrm{III}^*: 3\cdot x - 4\cdot z = 12$$

2) Eliminationsverfahren:

$$\begin{aligned} \mathrm{II}^*: \quad & 10\cdot x - 8\cdot z = 40 \\ -2\cdot\mathrm{III}^*: \quad & -6\cdot x + 8\cdot z = -24 \\ \hline \mathrm{II}^* - 2\cdot\mathrm{III}^*: \quad & 4\cdot x = 16 \end{aligned}$$

$$\implies x = 4 \overset{\mathrm{III}^*}{\implies} 4\cdot z = 3\cdot 4 - 12 \implies z = 0 \overset{\mathrm{I}}{\implies} y = 10 - 3\cdot 4 + 3\cdot 0 = -2$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat also genau eine Lösung, nämlich $(x \mid y \mid z) = (4 \mid -2 \mid 0)$.

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Ein Kino zeigt einen bestimmten Film gleichzeitig in 3 Kinosälen.

- Im Kinosaal X wird der Film in der Standardversion gezeigt. Hier kostet ein Ticket € 14,80.
- Im Kinosaal Y wird der Film in 3D gezeigt. Hier kostet ein Ticket € 17.
- Im Kinosaal Z wird der Film im „Director's Cut" gezeigt. Hier kostet ein Ticket € 19,30.

Insgesamt wurden 120 Tickets verkauft und € 2.067 eingenommen.
Für Kinosaal Z wurden 25 % mehr Tickets als für Kinosaal X verkauft.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Anzahl der jeweils verkauften Tickets für die Kinosäle X, Y und Z.

x ... Anzahl der verkauften Tickets für Kinosaal X — $\mathrm{I}: x + y + z = 120$

y ... Anzahl der verkauften Tickets für Kinosaal Y — $\mathrm{II}: 14{,}8\cdot x + 17\cdot y + 19{,}3\cdot z = 2067$

z ... Anzahl der verkauften Tickets für Kinosaal Z — $\mathrm{III}: 1{,}25\cdot x = z$

Gleichungssysteme mit GeoGebra lösen

Mit GeoGebra kannst du Gleichungssysteme folgendermaßen lösen:

1) CAS-Ansicht öffnen

2) Gleichungen eingeben (eine Gleichung pro Zeile)
Komma als Punkt (.) eingeben, nicht als Beistrich (,)

3) Alle Zeilen mit Gleichungen markieren
Mit gedrückter linker Maustaste die Zeilennummern links markieren

4) Markiertes Gleichungssystem mit x= lösen

Mehr dazu findest du am Technologieblatt – Gleichungen und Gleichungssysteme.