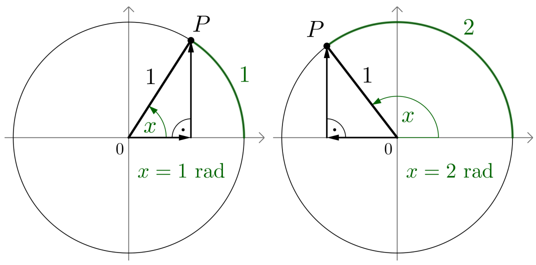
**Funktionsgraph der Sinusfunktion**

Bei den Winkel*funktionen* auf diesem Arbeitsblatt messen wir alle Winkel im Bogenmaß.
Rechts sind die beiden Winkel $x = 1$ rad bzw. $x = 2$ rad am Einheitskreis dargestellt.

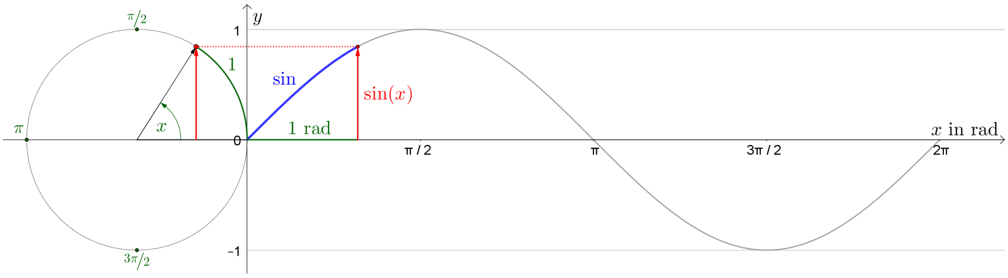
Da der Radius die Länge 1 hat, haben die beiden dargestellten Winkelbögen am Kreis die Länge 1 bzw. 2.

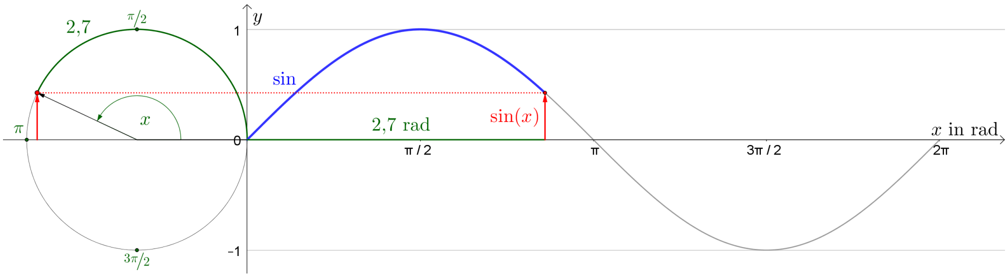
Jedem Winkel $x \in [0\,\text{rad}, 2 \cdot \pi\,\text{rad}[$ entspricht genau ein Punkt $P$ am Einheitskreis. Für seine Koordinaten gilt:

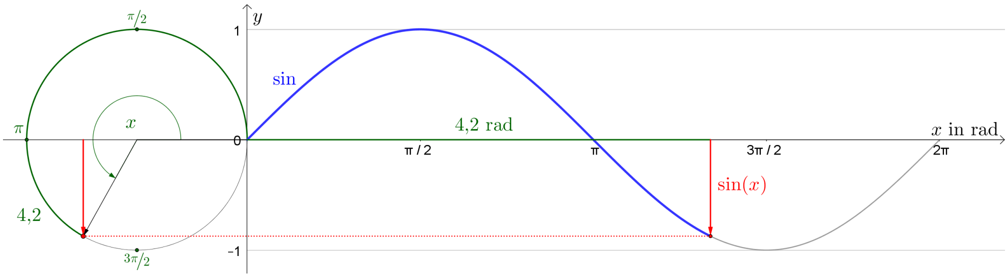
$$\boldsymbol{P = (\cos(x) \mid \sin(x))}$$

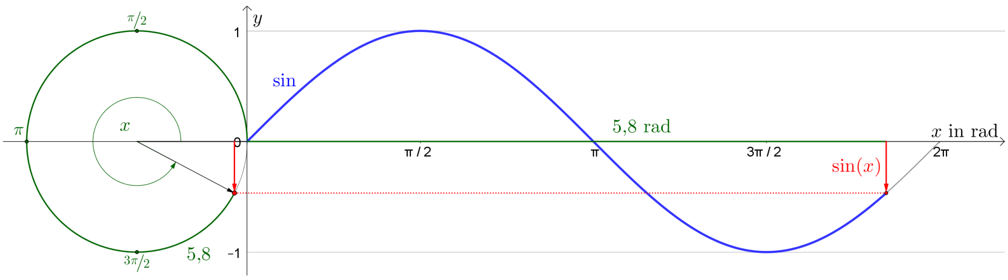



Die **Sinusfunktion** ordnet jedem Winkel $x$ die zugehörige 2. Koordinate $\sin(x)$ am Einheitskreis zu:




Im Intervall $[0\,\text{rad}, 2 \cdot \pi\,\text{rad}[$ hat die Sinusfunktion …

… die Nullstellen bei den Winkeln $x = 0\,\text{rad}$ und $x = \pi\,\text{rad}$.

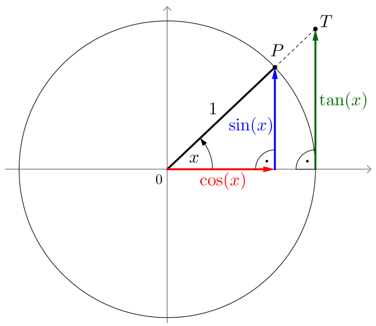
… den Hochpunkt $\left(\frac{\pi}{2}\,\text{rad} \mid 1\right)$ und den Tiefpunkt $\left(\frac{3 \cdot \pi}{2}\,\text{rad} \mid -1\right)$.

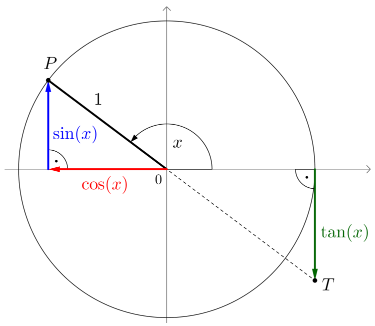
Am steilsten bergab geht die Sinusfunktion im Intervall $[0\,\text{rad}, 2 \cdot \pi\,\text{rad}[$ an der Stelle $x = \pi\,\text{rad}$.

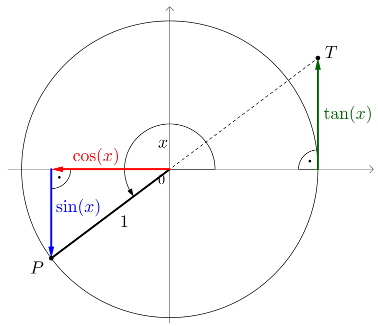
Diese Stelle ist eine sogenannte Wendestelle der Sinusfunktion.

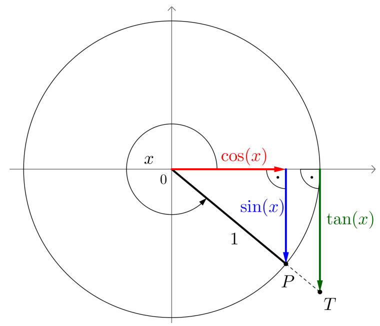
**Eigenschaften der Winkelfunktionen**

In den folgenden Bildern sind die Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens in den 4 Quadranten am Einheitskreis dargestellt:



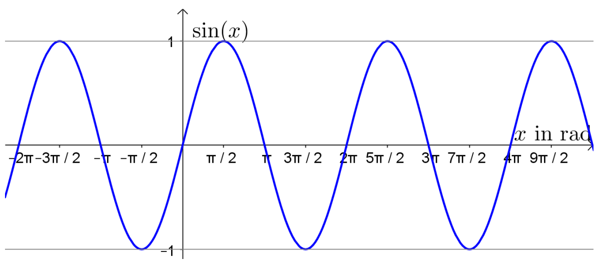




Die Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens haben daher die folgenden Eigenschaften:

**Sinusfunktion: $\sin(x)$**




Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$

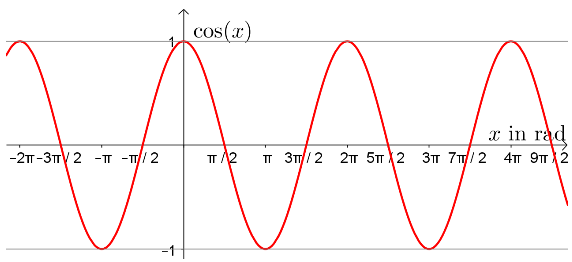
(Kleinstmögliche) Wertemenge: $W = [-1; 1]$

(Kleinstmögliche) Periodendauer: $T = 2 \cdot \pi$ rad

Nullstellen: $k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Symmetrie zum Koordinatenursprung $(0 \mid 0)$:
$\boldsymbol{\sin(-x) = -\sin(x)}$ sin ist eine ungerade Funktion.

**Cosinusfunktion: $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$**




Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$

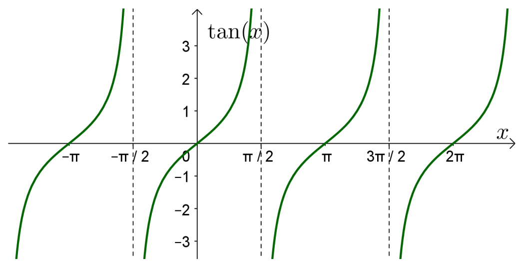
(Kleinstmögliche) Wertemenge: $W = [-1; 1]$

(Kleinstmögliche) Periodendauer: $T = 2 \cdot \pi$ rad

Nullstellen: $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Symmetrie zur vertikalen Achse:
$\boldsymbol{\cos(-x) = \cos(x)}$ cos ist eine gerade Funktion.

**Tangensfunktion: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$**




Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(Kleinstmögliche) Wertemenge: $W = \mathbb{R}$

(Kleinstmögliche) Periodendauer: $T = \pi$ rad

Nullstellen: $k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Symmetrie zum Koordinatenursprung $(0 \mid 0)$:
$\boldsymbol{\tan(-x) = -\tan(x)}$ tan ist eine ungerade Funktion.

Polstellen: $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

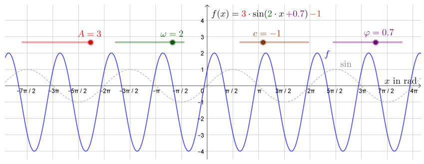
**Allgemeine Sinusfunktion**

Jede Funktion $f$ mit

$$f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + c$$

heißt **allgemeine Sinusfunktion**.

$A$ ... **Amplitude**
$\omega$ ... **Kreisfrequenz**
$\varphi$ ... **Nullphasenwinkel**




Die Graphen von $x \mapsto \sin(x)$ und $x \mapsto 3 \cdot \sin(2 \cdot x + 0{,}7) - 1$ unterscheiden sich durch ...

**1)** Skalierung in vertikaler Richtung ($A$),

**2)** Skalierung in horizontaler Richtung ($\omega$),

**3)** Verschiebung in vertikaler Richtung ($c$) und

**4)** Verschiebung in horizontaler Richtung ($\varphi$ bzw. $\omega$).

Diese Zusammenhänge zwischen den Graphen von

$$x \mapsto f(x) \quad \text{und} \quad x \mapsto a \cdot f(b \cdot x + c) + d$$

gelten nicht nur für die Sinusfunktion, sondern für *alle* reellen Funktionen $f$.

**Amplitude $A$**

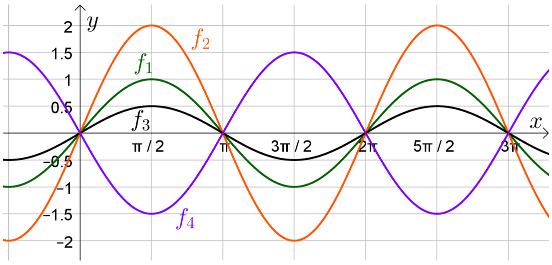
Die Funktionswerte von $g(x) = \sin(x)$ sind genau im Intervall $[-1; 1]$ enthalten.
Also sind die Funktionswerte von $\boldsymbol{f(x) = A \cdot \sin(x)}$ genau im Intervall $[-A; A]$ enthalten.

Eine Amplitude $A > 1$ bewirkt eine *Streckung* des Funktionsgraphen von $g$ in $y$-Richtung.

Eine Amplitude $0 < A < 1$ bewirkt eine *Stauchung* des Funktionsgraphen von $g$ in $y$-Richtung.

Die Graphen von $x \mapsto 3 \cdot \sin(x)$ und $x \mapsto -3 \cdot \sin(x)$ sind *Spiegelungen* voneinander an der $x$-Achse.

Die Graphen von Funktionen $f_i$ mit $f_i(x) = A \cdot \sin(x)$ sind unten dargestellt.




$f_1(x) = 1 \cdot \sin(x)$, weil $A = 1$.

$f_2(x) = 2 \cdot \sin(x)$, weil $A = 2$.

$f_3(x) = 0{,}5 \cdot \sin(x)$, weil $A = 0{,}5$.

$f_4(x) = -1{,}5 \cdot \sin(x)$, weil $A = -1{,}5$.

**Kreisfrequenz $\omega$**

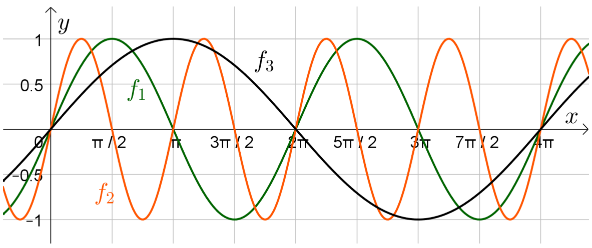
Die Funktion $g(x) = \sin(x)$ durchläuft eine vollständige Periode von $x = 0$ rad bis $x = 2 \cdot \pi$ rad.
Also durchläuft $\boldsymbol{f(x) = \sin(\omega \cdot x)}$ eine vollständige Periode von $x = 0$ rad bis $x = \dfrac{2 \cdot \pi}{\omega}$ rad.

Für die **Periodendauer $T$** und die **Kreisfrequenz $\omega$** gilt also: $\boldsymbol{T = \dfrac{2 \cdot \pi}{\omega}}$ bzw. $\boldsymbol{\omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{T}}$

Eine Kreisfrequzenz $\omega > 1$ bewirkt eine *Stauchung* von $g$ in $x$-Richtung. Je größer $\omega$, desto kleiner $T$.

Eine Kreisfrequzenz $0 < \omega < 1$ bewirkt eine *Streckung* von $g$ in $x$-Richtung. Je kleiner $\omega$, desto größer $T$.

Die Graphen von Funktionen $f_i$ mit $f_i(x) = \sin(\omega \cdot x)$ sind unten dargestellt.



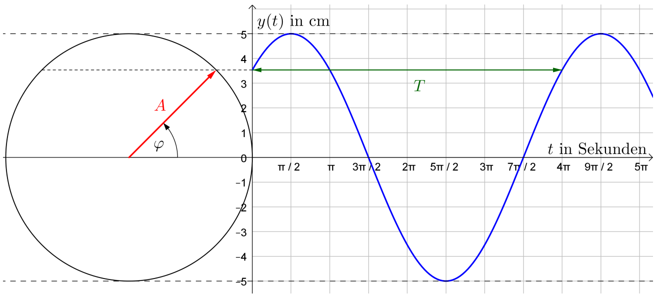

$f_1(x) = \sin(x)$, weil $\omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 1$.

$f_2(x) = \sin(2 \cdot x)$, weil $\omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{\pi} = 2$.

$f_3(x) = \sin(0{,}5 \cdot x)$, weil $\omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{4 \cdot \pi} = 0{,}5$.

**Zeigerdiagramm** MmF

In einem Zeigerdiagramm rotiert ein Zeiger gegen den Uhrzeigersinn.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Zeiger in der unten dargestellten Position.
Zum Zeitpunkt $t$ ist $y(t)$ die $y$-Koordinate der Zeigerspitze.




Der Graph der Funktion $y$ ist links dargestellt.
Dabei gilt:

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden
$y(t) \ldots$ $y$-Koordinate der Zeigerspitze in cm

**1)** Die Länge des Zeigers ist die Amplitude $A = 5$ cm.

**2)** Ermittle die Kreisfrequenz $\omega$ dieser allgemeinen Sinusfunktion.

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{4 \cdot \pi} = 0{,}5 \text{ rad/s}$$

Die Kreisfrequenz $\boldsymbol{\omega} = \frac{\text{Zurückgelegter Winkel}}{\text{Benötigte Zeit}}$ heißt deshalb auch **Winkelgeschwindigkeit**.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt: $y(0) = A \cdot \sin(\omega \cdot 0 + \varphi) = A \cdot \sin(\varphi)$

Der Winkel $\boldsymbol{\varphi}$ ist also der Winkel zum Zeitpunkt $t = 0$ und heißt deshalb **Nullphasenwinkel**.

Für den oben eingezeichneten Nullphasenwinkel gilt: $\varphi = \frac{\pi}{4}$ rad

Zum Zeitpunkt $t$ ist $\omega \cdot t + \varphi$ der Winkel des Zeigers.

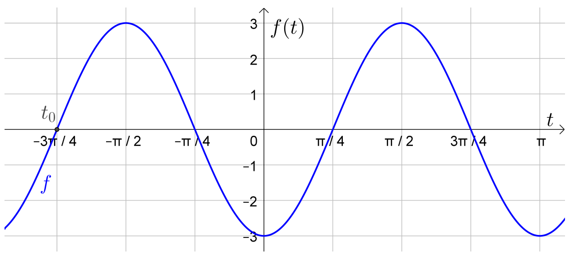
**3)** Rechne nach, dass der Zeiger zum Zeitpunkt $t = \frac{7 \cdot \pi}{2}$ waagrecht nach rechts zeigt.

$$\omega \cdot t + \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{7 \cdot \pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{8 \cdot \pi}{4} = 2 \cdot \pi \text{ rad}$$

Der Zeiger zeigt also waagrecht nach rechts.

**Nullphasenwinkel $\varphi$** MmF

Der Graph einer allgemeinen Sinusfunktion $f$ mit $f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ ist dargestellt.




**1)** Ermittle die Parameterwerte $A > 0$ und $\omega > 0$.

$$A = 3$$

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{\pi} = 2$$

Ausgehend von $t = 0$ drehen wir die Zeit so weit zurück, bis der Zeiger im Zeigerdiagramm waagrecht nach rechts zeigt. Dieser Zeitpunkt $t_0 = -\frac{3 \cdot \pi}{4}$ ist oben eingezeichnet.
Zum Zeitpunkt $t_0$ gilt $\omega \cdot t_0 + \varphi = 0$ bzw. $\boldsymbol{\varphi = -\omega \cdot t_0}$.

**2)** Ermittle damit den Nullphasenwinkel $\varphi \in [0 \text{ rad}; 2 \cdot \pi \text{ rad}[$ und eine Funktionsgleichung von $f$.

$$\varphi = -\omega \cdot t_0 = -2 \cdot \left(-\frac{3 \cdot \pi}{4}\right) = \frac{3 \cdot \pi}{2} \implies f(t) = 3 \cdot \sin\left(2 \cdot t + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right)$$

Jede Änderung von $\varphi$ um $2 \cdot \pi$ hat keine Auswirkung auf den Funktionsgraphen, weil $\sin(☺ + 2 \cdot \pi) = \sin(☺)$ gilt.
Zur Berechnung von $\varphi = -\omega \cdot t_0$ kannst du für $t_0$ deshalb jede Stelle wählen, bei der der Zeiger waagrecht nach rechts zeigt.
Bei dieser speziellen Funktion $f$ kannst du den Nullphasenwinkel $\varphi$ auch direkt an der Stelle $t = 0$ ablesen. Warum?

**Vertikale Verschiebung $c$**

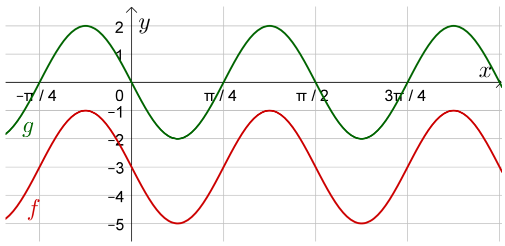
Die Funktionswerte von $g(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi)$ sind genau im Intervall $[-A; A]$ enthalten.

Also sind die Werte von $\boldsymbol{f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + c}$ genau im Intervall $[-A+c; A+c]$ enthalten.

$c > 0$ bewirkt eine *Verschiebung* des Funktionsgraphen von $g$ um $c$ Einheiten nach oben.

$c < 0$ bewirkt eine *Verschiebung* des Funktionsgraphen von $g$ um $|c|$ Einheiten nach unten.

**1)** Ermittle eine Gleichung der dargestellten Funktion $g$.




$A = 2$

$\omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{\pi/2} = 4$

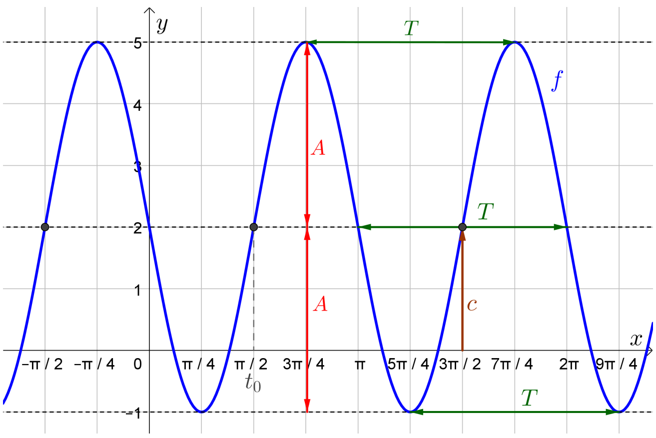
$t_0 = -\dfrac{\pi}{4} \implies \varphi = -\omega \cdot t_0 = -4 \cdot \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \pi$

$\implies g(x) = 2 \cdot \sin(4 \cdot x + \pi)$

**2)** Für die dargestellte Funktion $f$ gilt also: $f(x) = g(x) - 3 = 2 \cdot \sin(4 \cdot x - \pi) - 3$

**Funktionsgraph $\rightsquigarrow$ Funktionsgleichung**

Wir ermitteln die Parameter $A$, $\omega$, $\varphi$ und $c$ von $f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + c$ aus dem Graphen:




Die horizontalen Geraden durch die Hochpunkte und durch die Tiefpunkte sind links eingezeichnet.

Bei der dargestellten Funktion $f$ sind das die Geraden $y = 5$ und $y = -1$.

In der Mitte dazwischen verläuft die horizontale Gerade $y = \frac{5+(-1)}{2} = 2$.

Falls $c = 0$ gilt, dann ist die $x$-Achse diese mittlere Gerade.

**1)** Bei der dargestellten Funktion $f$ gilt also: $c = 2$

**2)** Die Amplitude $A$ ist der Abstand zwischen der mittleren und den beiden äußeren Geraden.

Bei der dargestellten Funktion $f$ gilt also: $A = 3$

**3)** Die Periodendauer $T$ ist (zum Beispiel) der Abstand zwischen benachbarten Hochpunkten.

$$T = \pi \implies \boldsymbol{\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}} = 2$$

**4)** Lies eine Stelle $t_0$ ab, an der der Graph die mittlere Gerade von unten nach oben schneidet.
Der Zeiger im entsprechenden Zeigerdiagramm zeigt an einer solchen Stelle also waagrecht nach rechts.

$$t_0 = -\frac{\pi}{2} \implies \boldsymbol{\varphi = -\omega \cdot t_0} = \pi$$

Eine Gleichung der dargestellten Funktion $f$ ist also $f(x) = 3 \cdot \sin(2 \cdot x + \pi) + 2$.

**Extrempunkte**

Gegeben ist die Funktion $f$ mit $f(x) = 4{,}2 \cdot \sin(5 \cdot x - 1) + 2$.
Berechne einen Hochpunkt und einen Tiefpunkt von $f$.

Der größte Wert von sin(☺) ist 1, also ist der größte Funktionswert $4{,}2 \cdot 1 + 2 = 6{,}2$.
Dieser größte Funktionswert wird z.B. an der Stelle ☺ $= \frac{\pi}{2}$ angenommen:

$$5 \cdot x - 1 = \frac{\pi}{2} \iff x = \frac{\pi + 2}{10} = 0{,}514...$$

$\implies$ Hochpunkt: (0,514... | 6,2)

Der kleinste Wert von sin(☺) ist $-1$, also ist der kleinste Funktionswert $4{,}2 \cdot (-1) + 2 = -2{,}2$.
Dieser kleinste Funktionswert wird z.B. an der Stelle ☺ $= \frac{3 \cdot \pi}{2}$ angenommen:

$$5 \cdot x - 1 = \frac{3 \cdot \pi}{2} \iff x = \frac{3 \cdot \pi + 2}{10} = 1{,}142...$$

$\implies$ Tiefpunkt: (1,142... | −2,2)

**Frequenz / Kreisfrequenz**

Für die Funktion $g$ gilt: $g(t) = 3{,}5 \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot t)$ ($t$ in Sekunden, $y(t)$ in cm)

Für die **Kreisfrequenz** $\boldsymbol{\omega}$ dieser Sinusschwingung gilt also: $\omega = 3 \cdot \pi$ rad/s

Einer vollständigen Kreisumdrehung entspricht der Winkel $2 \cdot \pi$ rad.

In diesem Zeigerdiagramm schafft der Zeiger also $\frac{3 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = \frac{3}{2}$ Umdrehungen pro Sekunde.

Das ist die sogenannte **Frequenz** $\boldsymbol{f}$ dieser Sinusschwingung: $f = \frac{3}{2}\ \frac{\text{Umdr.}}{\text{s}}$

Für die **Periodendauer** $\boldsymbol{T}$ dieser Sinusschwingung gilt: $T = \frac{2}{3}\ \frac{\text{s}}{\text{Umdr.}}$

Allgemein gilt: $\boldsymbol{\omega = 2 \cdot \pi \cdot f}$ bzw. $\boldsymbol{f = \frac{1}{T}}$

**Verschiedene Funktionsgleichungen – Gleiche Funktion**

Erinnere dich, dass $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Trage jeweils Zahlen in die großen Kästchen und + bzw. − in die kleinen Kästchen so ein,
dass die Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ stimmt.

**a)** $a(x) = 2 \cdot \sin(-4 \cdot x) + 3 = -2 \cdot \sin(4 \cdot x) + 3$

**b)** $b(x) = -3 \cdot \sin(2 \cdot x - 1) = 3 \cdot \sin(-2 \cdot x + 1)$

**c)** $c(x) = 5 \cdot \cos(-2 \cdot x + 3) = 5 \cdot \cos(2 \cdot x - 3)$

**d)** $d(x) = 4 \cdot \cos(3 \cdot x + \frac{\pi}{4}) = 4 \cdot \sin\left(3 \cdot x + \frac{3 \cdot \pi}{4}\right)$

**e)** $e(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4}) + \pi = \cos(x - \frac{\pi}{4}) + \pi$