

Die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n = 2^n$ ist **streng monoton wachsend**. Es gilt also $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \geq 1$.

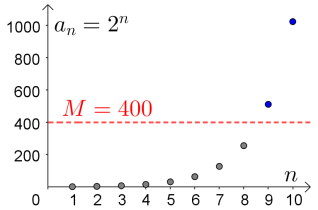
1) Berechne die ersten 5 Folgenglieder:

$$a_1 = 2 \quad a_2 = 4 \quad a_3 = 8 \quad a_4 = 16 \quad a_5 = 32$$

2) Ab dem wievielten Folgenglied sind alle Folgenglieder größer als $M = 400$

$$a_n > 400 \iff 2^n > 400 \iff n > \underbrace{\log_2(400)}_{=8,6...}$$

Ab dem 9. Folgenglied sind alle größer als 400.

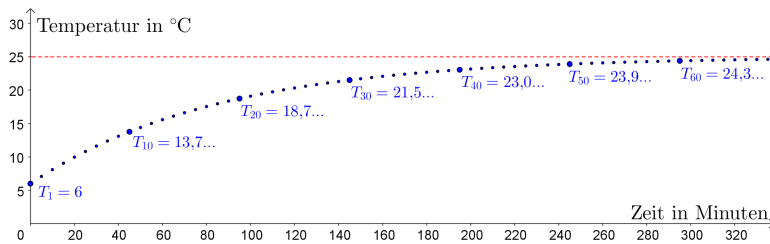


Tatsächlich wächst die Folge (a_n) unbeschränkt gegen unendlich (∞), das heißt:

Zu jeder noch so großen Zahl M gibt es ein Folgenglied, ab dem *alle* Glieder größer als M sind.

Wir schreiben dafür: $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$ oder kurz $2^n \rightarrow \infty$ „limit“ ist englisch für Grenze.

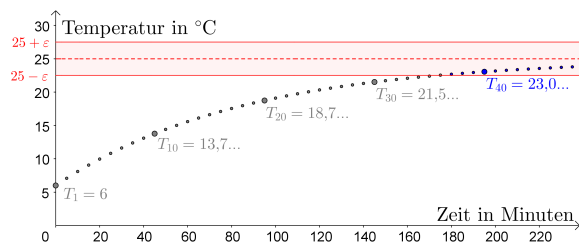
Du nimmst an einem Sommertag in forschender Absicht ein Getränk aus dem Kühlschrank und stellst es auf den Küchentisch. Alle 5 Minuten misst du die Temperatur des Getränks:



Die Folge der Messwerte (T_1, T_2, T_3, \dots) ist streng monoton wachsend.

Die Temperatur wird aber *nicht* unbeschränkt groß.

Die Folge $(T_n)_{n \geq 1}$ mit $T_n = 25 - 19 \cdot e^{-0,0584 \cdot (n-1)}$ ist streng monoton wachsend.



1) Berechne die angegebenen Folgenglieder.

$$T_{10} = 13,76... \quad T_{100} = 24,94...$$

$$T_{30} = 21,50... \quad T_{300} = 24,99...$$

2) Begründe anhand der Funktionsgleichung, warum $T_n < 25$ für alle $n \geq 1$ gilt.

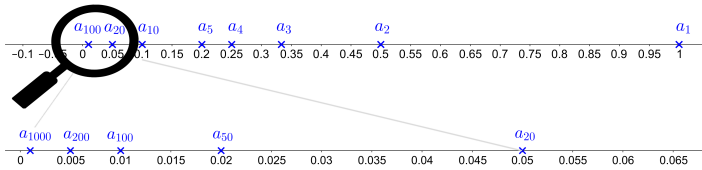
$$\text{Es gilt } e^x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und damit: } T_n = 25 - \underbrace{19 \cdot e^{-0,0584 \cdot (n-1)}}_{>0} < 25$$

Tatsächlich hat die Folge (T_n) den Grenzwert 25.

Wir schreiben dafür: $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 25$ oder kurz $T_n \rightarrow 25$

Die Folge $(a_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots\right)$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ ist **streng monoton fallend**.

Da Zähler und Nenner stets positiv sind, ist jedes Folgenglied größer als 0:



„0 ist eine untere Schranke der Folge.“

Ab dem wievielten Folgenglied sind alle Folgenglieder kleiner als 0,001?

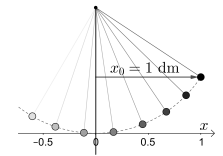
$$a_n < 0,001 \iff \frac{1}{n} < 0,001 \iff 1 < n \cdot 0,001 \iff 1000 < n \quad \text{ab dem 1001. Folgenglied}$$

Tatsächlich ist die Zahl 0 der Grenzwert dieser Folge: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ oder kurz $\frac{1}{n} \rightarrow 0$

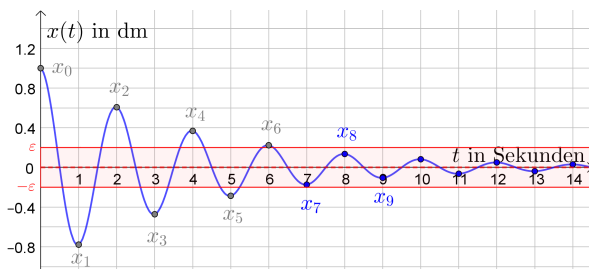
Auch Folgen, die *nicht* monoton sind, können einen Grenzwert haben.

Das rechts dargestellte Pendel schwingt hin und her.

Jeder Schwingung dauert eine Sekunde.



Die maximale Auslenkung aus der Ruheposition nimmt mit jedem Schwingungsbetragmäßig ab. Reibung



Dabei gilt: $x(t) = e^{-0,25 \cdot t} \cdot \cos(\pi \cdot t)$

$t \dots$ Zeit in Sekunden

$x(t) \dots$ horizontale Auslenkung in dm

Links siehst du den Graphen dieser Funktion.

Berechne die folgenden Funktionswerte.

Beachte, dass die Winkel im Bogenmaß sind.

$$\begin{aligned} x_0 = x(0) &= 1 & x_1 = x(1) &= -0,778\dots & x_2 = x(2) &= 0,606\dots \\ x_3 = x(3) &= -0,472\dots & x_4 = x(4) &= 0,367\dots & x_5 = x(5) &= -0,286\dots \end{aligned}$$

Tatsächlich gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-0,25 \cdot n} \cdot \cos(\pi \cdot n) = 0$

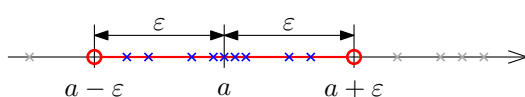
Der Faktor $\cos(\pi \cdot n)$ bleibt betragsmäßig ≤ 1 und $e^{-0,25 \cdot n} \rightarrow 0$.

Eine Folge *kann* ihren Grenzwert auch selbst enthalten.

Zum Beispiel hat die konstante Folge $(42; 42; 42; 42; \dots)$ den Grenzwert 42.

Wenn die Folge (a_n) den **Grenzwert** a hat, schreiben wir $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ bzw. $a_n \rightarrow a$ und meinen damit ganz genau das Folgende:

„Zu jedem Intervall $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$ gibt es ein Folgenglied, ab dem alle Glieder in diesem Intervall liegen.“



Das muss für jede noch so kleine *positive* Zahl ε gelten.

Das Intervall $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$ nennt man dann auch ε -Umgebung von a .

Mehr dazu findest du am [AB – Grenzwert von Folgen II](#).

Geometrische Folge – Grenzwert



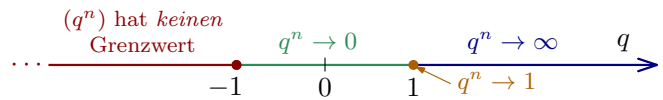
Das Verhalten der **geometrischen Folge** $(q^n)_{n \geq 1}$ hängt vom Wert der Basis q ab.

Berechne jeweils die ersten 4 Folgenglieder:

- 1) $q = 2$: (2; 4; 8; 16; ...)
- 2) $q = 1$: (1; 1; 1; 1; ...)
- 3) $q = 0,5$: (0,5; 0,25; 0,125; 0,0625; ...)
- 4) $q = -2$: (-2; 4; -8; 16; ...)
- 5) $q = -1$: (-1; 1; -1; 1; ...)
- 6) $q = -0,5$: (-0,5; 0,25; -0,125; 0,0625; ...)

Allgemein gilt:

- Wenn $-1 < q < 1$, dann $q^n \rightarrow 0$.
- Wenn $q = 1$, dann $q^n \rightarrow 1$.
- Wenn $q > 1$, dann $q^n \rightarrow \infty$.
- Wenn $q \leq -1$, dann hat (q^n) *keinen* Grenzwert.



Mehr dazu findest du am **AB – Grenzwert von Folgen II**.

Grenzwertsätze



Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ gilt, dann kann man zeigen:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ $b_n \neq 0, b \neq 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$, wenn f eine **stetige** Funktion ist und alle a_n und a in der Definitionsmenge von f sind.

Die elementaren Funktionen sind – überall dort, wo sie definiert sind – stetig. Zum Beispiel:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = a^2$
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$
- iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{a_n} = 2^a$
- iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(a_n) = \ln(a)$
- v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(a_n) = \sin(a)$
- vi) $\lim_{n \rightarrow \infty} \arccos(a_n) = \arccos(a)$

Grenzwertsätze



Wir ermitteln den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{16 - \frac{1}{n^2}} + 0,42^n$ mit den **Grenzwertsätzen**:

- 1) Wir wissen bereits, dass $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ gilt. Deshalb gilt auch: $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0 \cdot 0 = 0$
- 2) Da 0,42 betragsmäßig kleiner als 1 ist, gilt $0,42^n \rightarrow 0$.
- 3) Wir setzen diese Bausteine zusammen: $\sqrt{16 - \frac{1}{n^2}} + 0,42^n \rightarrow \sqrt{16 - 0} + 0 = \sqrt{16} = 4$

Grenzwertsätze



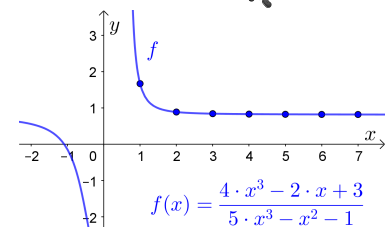
Ermittle den Grenzwert der Folge für $n \rightarrow \infty$.

- a) $a_n = \left(5 + \frac{3}{n}\right)^2 = \left(5 + 3 \cdot \frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow (5 + 3 \cdot 0)^2 = 25$
- b) $b_n = 4 \cdot \cos\left(\frac{3}{n}\right) - 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \rightarrow 4 \cdot \cos(0) - 2 \cdot \sin(0) = 4$
- c) $c_n = \frac{4 \cdot n^3 - 2 \cdot n + 3}{5 \cdot n^3 - n^2 - 1} = \frac{\cancel{n^3} \cdot \left(4 - \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3}\right)}{\cancel{n^3} \cdot \left(5 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right)} \rightarrow \frac{4 - 0 + 0}{5 - 0 - 0} = \frac{4}{5} = 0,8$

Hinweis: Hebe im Zähler und im Nenner jeweils n^3 heraus und kürze.

$$d) d_n = \frac{-3 \cdot n^2 + 5}{2 \cdot n^3 + n^2 - 3} = \frac{n^2 \cdot \left(-3 + \frac{5}{n^2}\right)}{n^3 \cdot \left(2 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^3}\right)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{-3 + \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^3}} \rightarrow 0 \cdot \frac{-3 + 0}{2 + 0 - 0} = 0 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$

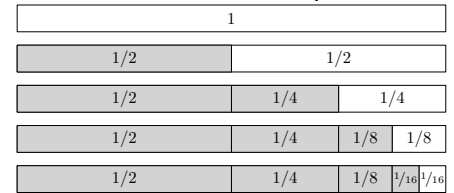
Hinweis: Hebe im Zähler n^2 und im Nenner n^3 heraus und kürze.



Ein Meter bleibt ein Meter.



Wir nehmen einen Papierstreifen mit 1 Meter Länge.
 Wir teilen ihn genau in der Mitte.
 Dann nehmen wir eine Hälfte und teilen sie wieder in der Mitte.
 Und so machen wir immer weiter.



Die Gesamtlänge dieser potentiell unendlich vielen Papierschnitzel verändert sich dabei *nicht*.

Intuitiv gilt deshalb: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots = 1$

Unendliche geometrische Reihe



Erinnere dich an die **Summenformel**, die für jede geometrische Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ mit Quotient q gilt:

$$s_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Wenn $|q| < 1$ gilt, dann können wir die Summe aller unendlich vielen Folgenglieder berechnen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots = \frac{b_1}{1 - q}$$

$$b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \rightarrow b_1 \cdot \frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{b_1}{1 - q}$$

Unendliche geometrische Reihe



Ermittle den Quotienten q der gegebenen geometrischen Folge.
 Berechne damit die Summe *aller* unendlich vielen Folgenglieder.

a) $(a_n) = (\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots) \implies q = \frac{1}{2} \implies \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$

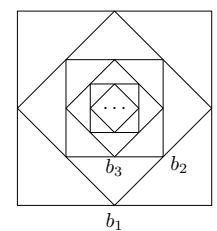
b) $(b_n) = (25; 20; 16; \dots) \implies q = 0,8 \implies 25 + 20 + 16 + \dots = \frac{25}{1 - 0,8} = 125$

c) $(c_n) = (100; -10; 1; -0,1; \dots) \implies q = -0,1 \implies 100 - 10 + 1 - 0,1 + \dots = \frac{100}{1 - (-0,1)} = 90,9\overline{0}$

Selbstähnlichkeit



Wir teilen jede Seite von einem Quadrat mit Seitenlänge b_1 in der Hälfte.
 Dann schreiben wir dem Quadrat ein weiteres Quadrat mit Seitenlänge b_2 ein.
 Dem neuen Quadrat schreiben wir genauso ein Quadrat mit Seitenlänge b_3 ein, usw.
 Ist der ursprüngliche Umfang $u = 4 \cdot b_1$ länger oder $b_1 + b_2 + b_3 + \dots$?



$$b_2 = \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_1}{2}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \frac{b_1^2}{4}} = \sqrt{b_1^2 \cdot \frac{1}{2}} = b_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Allgemein gilt: $b_{n+1} = b_n \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

Die Folge der Seitenlängen (b_n) ist also eine geometrische Folge mit Quotient $q = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071\dots$

$$\implies b_1 + b_2 + b_3 + \dots = \frac{b_1}{1 - q} = 3,4142\dots \cdot b_1 < 4 \cdot b_1$$

Der ursprüngliche Umfang $u = 4 \cdot b_1$ ist also länger als $b_1 + b_2 + b_3 + \dots$.

