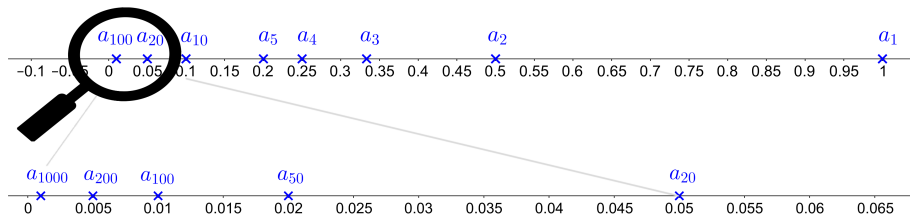


Wir nehmen die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ genauer unter die Lupe: $(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$

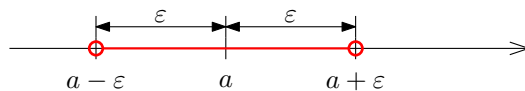


Die Folge (a_n) hat vermutlich den Grenzwert $a = 0$. Aber was heißt das genau?

Wir wählen eine Zahl a auf der Zahlengerade und eine positive Zahl ϵ .

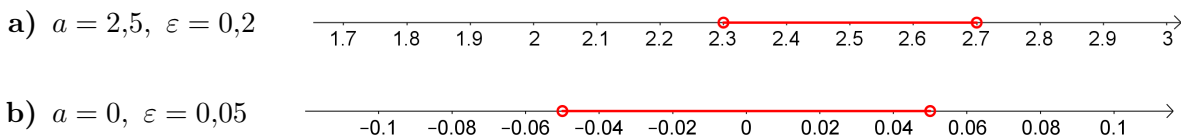
Wir denken bei ϵ an eine kleine Zahl, zum Beispiel $\epsilon = 0,1$.

Die ϵ -Umgebung von a besteht aus allen Zahlen, deren Abstand von a kleiner als ϵ ist.

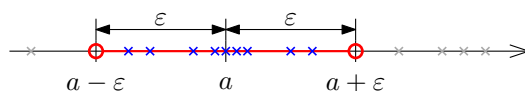


Die ϵ -Umgebung von a ist also genau das Intervall $]a - \epsilon; a + \epsilon[$.

Zeichne die angegebene ϵ -Umgebung von a auf der Zahlengerade ein.



Wenn wir sagen, dass eine Folge (a_n) den Grenzwert a hat, meinen wir damit ganz genau das Folgende: „Zu jeder ϵ -Umgebung von a gibt es ein Folgenglied, ab dem alle Glieder in dieser Umgebung liegen.“

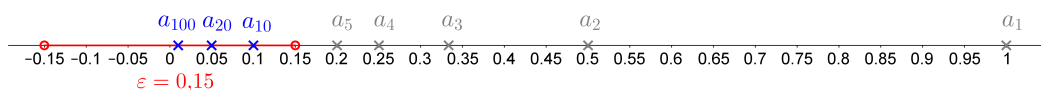


Das muss für jede noch so kleine positive Zahl ϵ gelten.
Wir sagen auch: „Fast alle Glieder liegen in der ϵ -Umgebung.“
Mit *fast allen* Gliedern meinen wir alle bis auf endlich viele.

Wir schreiben dann $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder kürzer $a_n \rightarrow a$.

„limit“ ist englisch für Grenze.

Die Folge $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$ hat den Grenzwert $a = 0$.



Wenn $\epsilon = 0,15$ ist, dann liegen ab dem 7. Folgenglied *alle* Folgenglieder in der ϵ -Umgebung von 0.

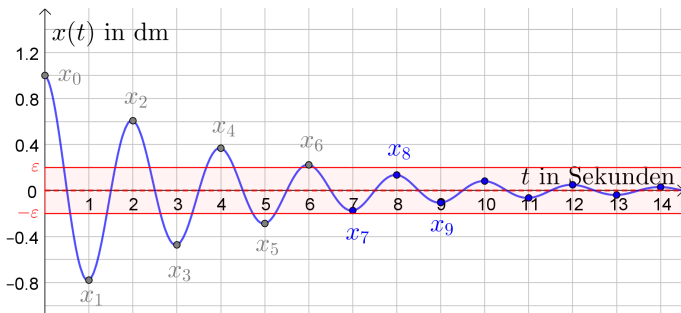
Allgemein gilt für jede Zahl $\epsilon > 0$:

Wenn $n > \frac{1}{\epsilon}$ ist, dann gilt $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$, also liegt a_n in der ϵ -Umgebung von 0.

Gedämpfte Schwingung – Grenzwert



Die Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ mit $x_n = e^{-0,25 \cdot n} \cdot \cos(\pi \cdot n)$ hat den Grenzwert $x = 0$.



Wenn $\varepsilon = 0,2$ ist, dann ist $x_6 = 0,22\dots$
noch *nicht* in der ε -Umgebung von 0.

Wenn $\varepsilon = 0,2$ ist, dann ist $x_7 = -0,17\dots$
in der ε -Umgebung von 0.

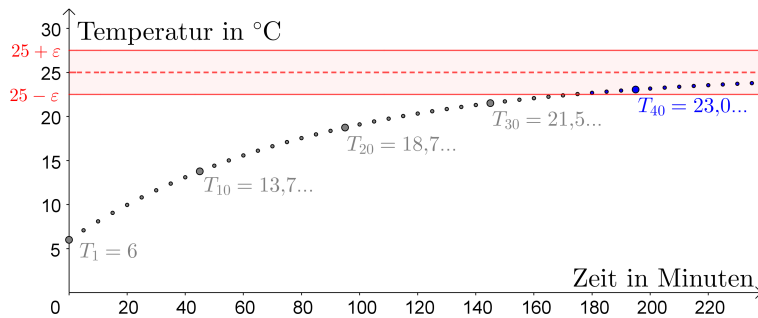
Allgemein gilt für jede Zahl $\varepsilon > 0$:

Wenn $n > \frac{\ln(\frac{\varepsilon}{-0,25})}{-0,25}$ ist, dann gilt $|x_n| < \varepsilon$.

Beschränktes Wachstum – Grenzwert



Die Folge $(T_n)_{n \geq 1}$ mit $T_n = 25 - 19 \cdot e^{-0,0584 \cdot (n-1)}$ hat den Grenzwert $T = 25$.



Im Bild links ist die ε -Umgebung von 25 mit $\varepsilon = 2,5$ eingezeichnet.

Erinnere dich, dass für alle Zahlen $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a^x > 0$$

Deshalb gilt $T_n < 25$ für alle n .

Wie groß muss n sein, damit $T_n > 22,5$ gilt?

$$\begin{aligned}
 25 - 19 \cdot e^{-0,0584 \cdot (n-1)} &> 22,5 && \iff \\
 2,5 &> 19 \cdot e^{-0,0584 \cdot (n-1)} && \iff \\
 \frac{2,5}{19} &> e^{-0,0584 \cdot (n-1)} && \iff \\
 \ln\left(\frac{2,5}{19}\right) &> -0,0584 \cdot (n-1) && \iff \text{Division durch negative Zahl} \\
 \underbrace{= -2,028\dots} &&& \\
 \frac{-2,028\dots}{-0,0584} &< n-1 && \iff \\
 35,7\dots &< n &&
 \end{aligned}$$

Ab dem 36. Folgenglied liegen also *alle* Folgenglieder in dieser ε -Umgebung.

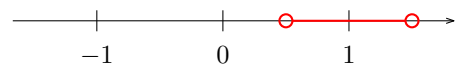
Allgemein gilt für jede Zahl $\varepsilon > 0$: Wenn $n > \frac{\ln(\frac{\varepsilon}{19})}{-0,0584} + 1$ ist, dann liegt T_n in der ε -Umgebung von 25.

Folge ohne Grenzwert



Die Folge $(b_n)_{n \geq 1} = ((-1)^n)_{n \geq 1} = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ hat gar *keinen* Grenzwert.

Erkläre, warum 1 *sicher nicht* der Grenzwert von (b_n) ist.



$]0,5; 1,5[$ ist die ε -Umgebung von 1 mit $\varepsilon = 0,5$.

Es liegen unendlich viele Glieder außerhalb dieser ε -Umgebung.

1 ist aber ein sogenannter **Häufungspunkt** der Folge, denn jede ε -Umgebung von 1 enthält unendlich viele Glieder. Ebenso -1 .

Es kann nur einen geben.



Eine bestimmte Folge (a_n) hat einen Grenzwert. Emil behauptet, der Grenzwert ist $e = 2,7182\dots$
 Pia ist sicher, dass $\pi = 3,1415\dots$ der Grenzwert ist. Können Emil und Pia beide Recht haben?



Wenn Emil Recht hat, dann müssen fast alle Glieder in $]3,0415\dots; 3,2415\dots[$ liegen. ($\varepsilon = 0,1$)
 Wenn Pia Recht hat, dann müssen fast alle Glieder in $]2,6182\dots; 2,8182\dots[$ liegen. ($\varepsilon = 0,1$)
 Also können nicht beide Recht haben.

Wenn eine Folge einen Grenzwert hat, dann muss dieser Grenzwert also *eindeutig* sein.

Grenzwert ∞

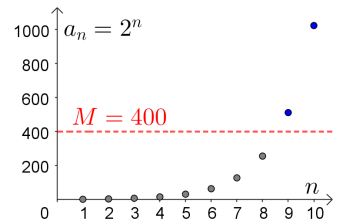


Mit der Schreibweise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{oder kurz} \quad a_n \rightarrow \infty$$

meinen wir, dass es zu jeder noch so großen Zahl M ein Folgenglied gibt, ab dem *alle* Folgenglieder größer als M sind.

Zum Beispiel: $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$



Rechnen mit ∞



Für die Folgen (u_n) bzw. (p_n) gilt: $u_n \rightarrow \infty$ bzw. $p_n \rightarrow p > 0$

Trage den Grenzwert der jeweils zusammengesetzten Folge in das Kästchen ein:

- i) $p_n \cdot u_n \rightarrow \infty$ ii) $-p_n \cdot u_n \rightarrow -\infty$ iii) $p_n + u_n \rightarrow \infty$ iv) $-p_n + u_n \rightarrow \infty$

Rationale Funktion



Hinter der Folge (a_n) mit $a_n = \frac{n^2 - 2 \cdot n - 10}{0,007 \cdot n + 0,06}$ steckt eine sogenannte **rationale Funktion**.

1) Ermittle den Grenzwert von (a_n) .

$$\text{Rationale Funktion} = \frac{\text{Polynomfunktion}}{\text{Polynomfunktion}}$$

Hinweis: Hebe im Zähler n^2 und im Nenner n heraus und kürze.

$$a_n = \frac{n^2 - 2 \cdot n - 10}{0,007 \cdot n + 0,06} = \frac{n^2 \cdot (1 - \frac{2}{n} - \frac{10}{n^2})}{n \cdot (0,007 + \frac{0,06}{n})} = n \cdot \frac{1 - \frac{2}{n} - \frac{10}{n^2}}{\underbrace{0,007 + \frac{0,06}{n}}_{\rightarrow \frac{1}{0,007}}} \rightarrow \infty$$

2) Ab welchem Folgenglied sind alle Folgenglieder größer als 1000?

$$a_n > 1000 \iff n^2 - 2 \cdot n - 10 > 7 \cdot n + 60 \iff n^2 - 9 \cdot n - 70 > 0$$

Der Funktionsgraph von $n \mapsto n^2 - 9 \cdot n - 70$ ist eine nach oben offene Parabel.
 Wir berechnen ihre Nullstellen:

$$\underbrace{n^2 - 9 \cdot n - 70}_{=(n+5) \cdot (n-14)} = 0 \iff n = -5 \quad \text{oder} \quad n = 14$$

Ab dem 15. Folgenglied sind also alle Folgenglieder größer als 1000.

$0 \cdot \infty = ?$ 

Antonia möchte wissen: „Wenn $2 \cdot \infty = \infty$ und $-2 \cdot \infty = -\infty$ ist, was ist dann $0 \cdot \infty$?“
 Mile meint: „Wir wissen doch schon seit Langem, dass 0 mal einer Zahl immer 0 ergibt.“
 Tatsächlich ist aber bei Ausdrücken der Form „ $0 \cdot \infty$ “ jedes Ergebnis möglich:

a) $\underbrace{\frac{42}{n}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{n}_{\rightarrow \infty} = 42$ b) $\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{n}_{\rightarrow \infty} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ c) $\underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{n^2}_{\rightarrow \infty} = n \rightarrow \infty$ d) $\underbrace{-\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{n^2}_{\rightarrow \infty} = -n \rightarrow -\infty$

Unbestimmte Ausdrücke 

Ausdrücke der Form

i) $0 \cdot \infty$ ii) $0 \cdot (-\infty)$ iii) $\frac{0}{0}$ iv) $\frac{\infty}{0}$ v) $\frac{-\infty}{0}$ vi) $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ vii) $\infty - \infty$


nennen wir auch **unbestimmte Ausdrücke**.

Behauptest du zum Beispiel ein stets richtiges Ergebnis für $0 \cdot \infty$ zu kennen, dann zeige ich dir oben ein Gegenbeispiel.

Ausdrücke der Form $\frac{\infty}{0}$ gehen betragsmäßig gegen ∞ . Ob der Grenzwert i) ∞ oder ii) $-\infty$ ist oder ob er iii) gar nicht existiert, hängt von der Nullfolge im Nenner ab. Zum Beispiel: i) $a_n = \frac{1}{n}$ ii) $b_n = -\frac{1}{n}$ iii) $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$


Beschränktheit 

Eine Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ heißt **beschränkt**, wenn es Zahlen a und b gibt mit $a \leq x_n \leq b$ für alle $n \geq 1$. Ihre Folgenglieder liegen dann also *alle* im Intervall $[a; b]$. Die Zahl a nennen wir eine **untere Schranke** und die Zahl b eine **obere Schranke** der Folge.

Beschränktheit 

Ist die Folge beschränkt? Falls ja, gib eine untere Schranke und eine obere Schranke an.

- a) (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ **Beschränkt:** $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$
- b) (b_n) mit $b_n = \sin(n)$ **Beschränkt:** $-1 \leq \sin(n) \leq 1$
- c) (c_n) mit $c_n = 2^n$ **Unbeschränkt:** $2^n \rightarrow \infty$
- d) (d_n) mit $d_n = (-0,99)^n$ **Beschränkt:** $-1 \leq (-0,99)^n \leq 1$
- e) (e_n) mit $e_n = 5 \cdot \cos(n)$ **Beschränkt:** $-5 \leq 5 \cdot \cos(n) \leq 5$
- f) (f_n) mit $f_n = -42 \cdot n$ **Unbeschränkt:** $-42 \cdot n \rightarrow -\infty$
- g) (g_n) mit $g_n = (-3)^n$ **Unbeschränkt:** $(-3)^n$ hat weder obere noch untere Schranken.

Monotoniekriterium 

Die Folge (a_n) ist monoton wachsend und beschränkt.

Dann hat die Folge (a_n) einen Grenzwert, nämlich die *kleinste obere Schranke* der Folge. „Supremum“

Die Folge (b_n) ist monoton fallend und beschränkt.

Dann hat die Folge (b_n) einen Grenzwert, nämlich die *größte untere Schranke* der Folge. „Infimum“