

Der Graph einer stückweise linearen Funktion f ist im Intervall $[0; 9]$ dargestellt.

x	$F(x)$
0	0
1	2
2	4
3	6
4	7,5
5	8
6	7,5
7	6
8	4
9	2

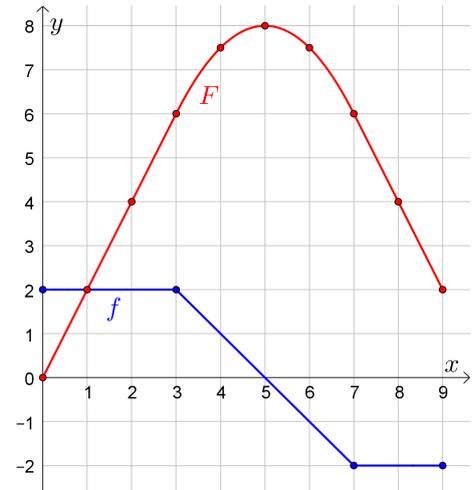
Die Funktion F mit

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

ist auch im Intervall $[0; 9]$ definiert.

- 1) Vervollständige links die Wertetabelle.
- 2) Den größten Funktionswert nimmt die Funktion F an der Stelle $x = 5$ an.
- 3) Skizziere rechts den Graphen der Funktion F im Intervall $[0; 9]$.

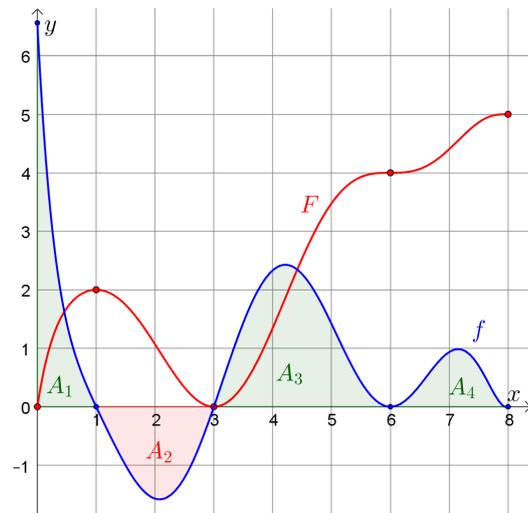
Die Funktion F heißt auch **Integralfunktion**.



Konstruktion einer Stammfunktion 

Die links unten dargestellten Flächen haben die Inhalte $A_1 = 2$, $A_2 = 2$, $A_3 = 4$ und $A_4 = 1$.

Die Funktion F mit $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ist im Intervall $[0; 8]$ definiert.



- 1) Trage 5 verschiedene Wertepaare der Funktion F ein:

x	0	1	3	6	8
$F(x)$	0	2	0	4	5

Streiche bei 2), 3) und 4) jeweils passend durch.

- 2) Wenn in einem Intervall $f(x) > 0$ gilt, dann ist F in diesem Intervall streng monoton steigend / ~~fallend~~.

Wenn in einem Intervall $f(x) < 0$ gilt, dann ist F in diesem Intervall streng monoton ~~steigend~~ / fallend.

- 3) Im Punkt $(1 | 2)$ hat F einen Hochpunkt / ~~Tiefpunkt~~ / ~~Sattelpunkt~~.

Im Punkt $(3 | 0)$ hat F einen ~~Hochpunkt~~ / Tiefpunkt / ~~Sattelpunkt~~.

Im Punkt $(6 | 4)$ hat F einen ~~Hochpunkt~~ / ~~Tiefpunkt~~ / Sattelpunkt.

- 4) Wenn f ein lokales Maximum hat, dann hat die Steigung von F an dieser Stelle ein lokales ~~Minimum~~ / Maximum.

Wenn f ein lokales Minimum hat, dann hat die Steigung von F an dieser Stelle ein lokales Minimum / ~~Maximum~~.

- 5) Skizziere oben den Graphen der Funktion F im Intervall $[0; 8]$.

Vieles deutet darauf hin, dass die **Integralfunktion** F eine **Stammfunktion** von f ist, also dass $F' = f$ gilt.

Der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** bestätigt diese Vermutung.

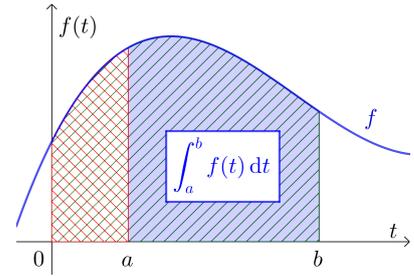
Für jede **stetige** Funktion f gilt der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**:

1) Die Funktion F mit

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

ist eine Stammfunktion von f .

Es gilt also $F'(x) = f(x)$ an jeder Stelle x .



2) Mithilfe dieser Stammfunktion F können wir $\int_a^b f(t) dt$ berechnen:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_0^b f(t) dt - \int_0^a f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Das bestimmte Integral von f in $[a; b]$ ist also genau die **absolute Änderung** von F in $[a; b]$.

Die Funktion F ist die Stammfunktion von f mit $F(0) = 0$.

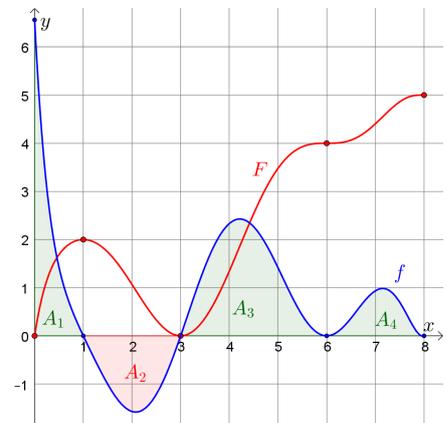
Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein:

$$\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = 2 - 0 = 2$$

$$\int_1^3 f(x) dx = F(3) - F(1) = 0 - 2 = -2$$

$$\int_3^6 f(x) dx = F(6) - F(3) = 4 - 0 = 4$$

$$\int_6^8 f(x) dx = F(8) - F(6) = 5 - 4 = 1$$



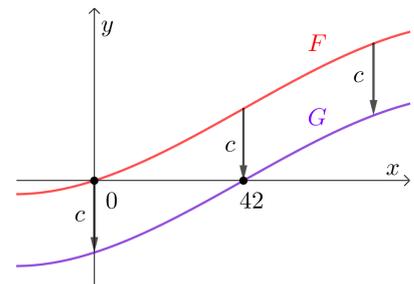
Tatsächlich ist die Funktion $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ für *jede* untere Grenze $a \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f .

Die Stammfunktion $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ unterscheidet sich

zum Beispiel von $G(x) = \int_{42}^x f(t) dt$ an jeder Stelle x nur

um eine Konstante c , die *nicht* von x abhängt, denn es gilt:

$$F(x) - G(x) = \int_0^x f(t) dt - \int_{42}^x f(t) dt = \int_0^{42} f(t) dt = c$$



Die Graphen der beiden Funktionen F und G unterscheiden sich also nur um eine Verschiebung um c Einheiten in vertikaler Richtung.

Die *Steigung* bleibt bei einer Verschiebung in vertikaler Richtung an jeder Stelle unverändert.

Es gilt also: $G'(x) = F'(x) = f(x)$

Die Funktion G ist damit so wie F auch eine Stammfunktion von f .

Der Graph der Stammfunktion $G(x) = \int_{42}^x f(t) dt$ ist vertikal so verschoben, dass $G(42) = 0$ gilt.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 

Das bestimmte Integral $\int_0^1 x^2 dx$ können wir zwar als Grenzwert von Obersummen berechnen.

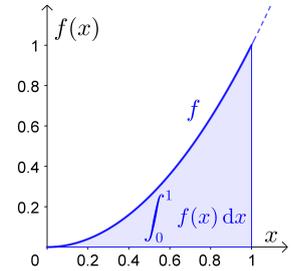
Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist die Berechnung aber deutlich kürzer:

- 1) Ermittle eine beliebige Stammfunktion F der Funktion f mit $f(x) = x^2$.

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3$$

- 2) Berechne das bestimmte Integral mit dem Hauptsatz:

$$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$



Schreibweise 

Die folgende kürzere Schreibweise ist bei der Anwendung des Hauptsatzes üblich:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Geschwindigkeit-Zeit-Funktion 

Die Geschwindigkeit eines Autos wird 14 Sekunden lang aufgezeichnet.

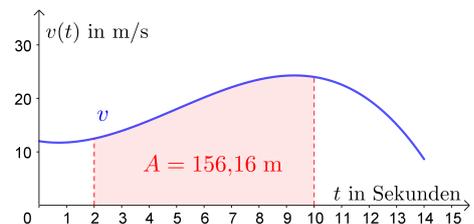
Der Graph der zugehörigen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v ist rechts unten dargestellt. Dabei gilt:

$$v(t) = -0,04 \cdot t^3 + 0,6 \cdot t^2 - 0,8 \cdot t + 12$$

$t \dots$ Zeit in Sekunden ($t \geq 0$)

$v(t) \dots$ Geschwindigkeit des Autos zum Zeitpunkt t in m/s

- 1) Zeichne rechts eine Fläche mit Inhalt $A = \int_2^{10} v(t) dt$ ein.



- 2) Berechne A mit dem Hauptsatz, und interpretiere das Ergebnis im Sachzusammenhang.

$$\int_2^{10} v(t) dt = -0,01 \cdot t^4 + 0,2 \cdot t^3 - 0,4 \cdot t^2 + 12 \cdot t \Big|_2^{10} = 180 - 23,84 = 156,16$$

Das Auto legt im Zeitintervall $[2; 10]$ insgesamt 156,16 m zurück.

Orientierter Flächeninhalt 

Rechts ist die Sinusfunktion dargestellt: $f(x) = \sin(x)$

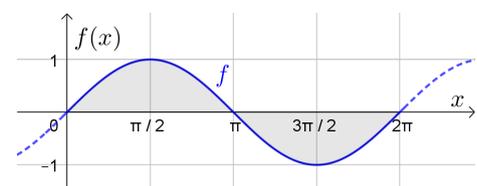
- a) Berechne $\int_0^{2\pi} f(x) dx$. (Winkel im Bogenmaß)

- b) Berechne den Flächeninhalt, den der Graph von f im Intervall $[0; 2 \cdot \pi]$ mit der x -Achse einschließt.

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{2\pi} = -1 - (-1) = 0$$

$$\text{b) } \int_0^{\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2 \quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_{\pi}^{2\pi} = -1 - 1 = -2$$

Die grau markierte Fläche hat also den Inhalt 4.

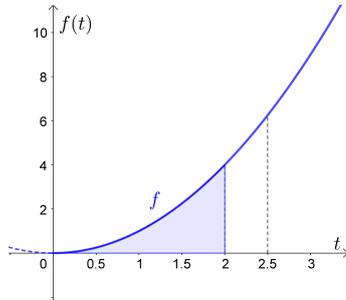


Der Graph von $f(x) = x^2$ ist unten dargestellt. Wir betrachten die Integralfunktion $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

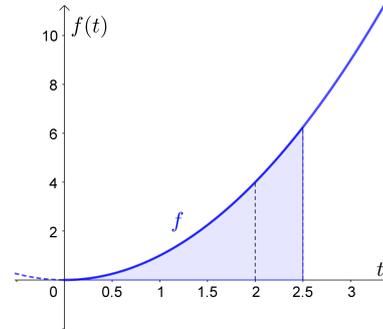
Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sagt aus, dass $F'(x) = f(x) = x^2$ gilt.

Wir weisen jetzt ohne Verwendung des Hauptsatzes nach, dass tatsächlich $F'(2) = f(2) = 4$ gilt.

Markiere die Fläche mit Inhalt $F(2)$:

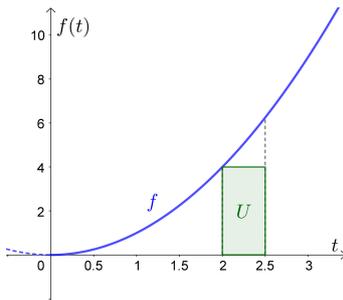


Markiere die Fläche mit Inhalt $F(2,5)$:

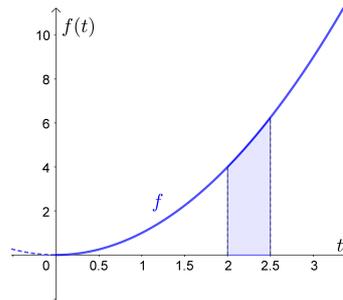


Berechne den Flächeninhalt U :

$$U = f(2) \cdot 0,5 = 2$$

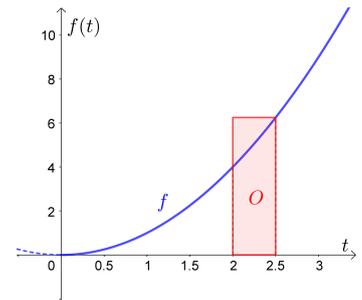


Markiere nun die Fläche mit Inhalt $F(2,5) - F(2)$:



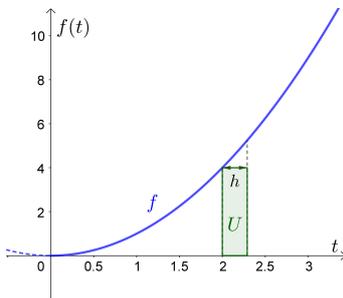
Berechne den Flächeninhalt O :

$$O = f(2,5) \cdot 0,5 = 3,125$$

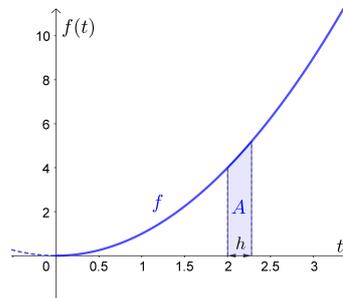


Statt der Breite 0,5 wählen wir jetzt eine variable, kleine Breite $h > 0$. Dann gilt:

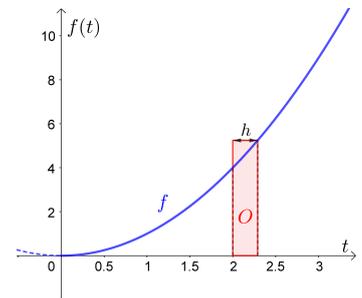
$$U = f(2) \cdot h$$



$$A = F(2+h) - F(2)$$



$$O = f(2+h) \cdot h$$



Wir dividieren die Ungleichung $U \leq A \leq O$ durch $h > 0$: $f(2) \leq \frac{F(2+h) - F(2)}{h} \leq f(2+h)$

Wir bilden den Grenzwert $h \rightarrow 0$. Dann gilt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h) - F(2)}{h} = F'(2)$ und $\lim_{h \rightarrow 0} f(2+h) = f(2)$, weil f stetig ist.

Es folgt $f(2) \leq F'(2) \leq f(2)$, also muss tatsächlich $F'(2) = f(2)$ gelten.

Die Monotonie von f vereinfacht die Begründung. **Tatsächlich** genügt es, wenn f eine stetige Funktion ist.

