

Der Graph einer stückweise linearen Funktion  $f$  ist im Intervall  $[0; 9]$  dargestellt.

$x$	$F(x)$
0	0
1	2
2	4
3	6
4	7,5
5	8
6	7,5
7	6
8	4
9	2

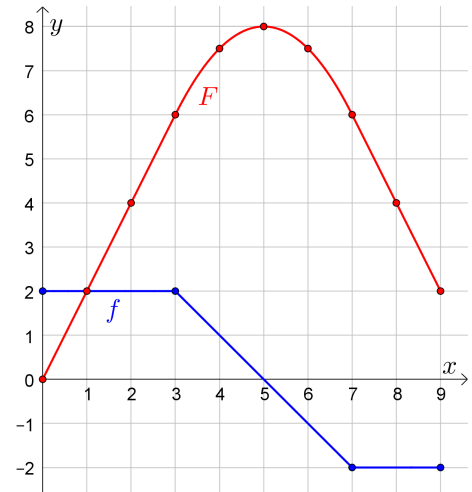
Die Funktion  $F$  mit

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

ist auch im Intervall  $[0; 9]$  definiert.

- 1) Vervollständige links die Wertetabelle.
- 2) Den größten Funktionswert nimmt die Funktion  $F$  an der Stelle  $x = 5$  an.
- 3) Skizziere rechts den Graphen der Funktion  $F$  im Intervall  $[0; 9]$ .

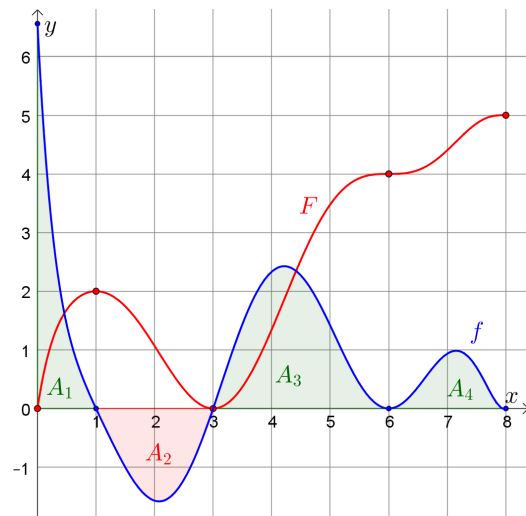
Die Funktion  $F$  heißt auch **Integralfunktion**.



Konstruktion einer Stammfunktion 

Die links unten dargestellten Flächen haben die Inhalte  $A_1 = 2$ ,  $A_2 = 2$ ,  $A_3 = 4$  und  $A_4 = 1$ .

Die Funktion  $F$  mit  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  ist im Intervall  $[0; 8]$  definiert.



- 1) Trage 5 verschiedene Wertepaare der Funktion  $F$  ein:

$x$	0	1	3	6	8
$F(x)$	0	2	0	4	5

Streiche bei **2)**, **3)** und **4)** jeweils passend durch.

- 2) Wenn in einem Intervall  $f(x) > 0$  gilt, dann ist  $F$  in diesem Intervall streng monoton steigend / ~~fallend~~.

Wenn in einem Intervall  $f(x) < 0$  gilt, dann ist  $F$  in diesem Intervall streng monoton ~~steigend~~ / fallend.

- 3) Im Punkt  $(1 | 2)$  hat  $F$  einen Hochpunkt / ~~Tiefpunkt~~ / ~~Sattelpunkt~~.

Im Punkt  $(3 | 0)$  hat  $F$  einen ~~Hochpunkt~~ / Tiefpunkt / ~~Sattelpunkt~~.

Im Punkt  $(6 | 4)$  hat  $F$  einen ~~Hochpunkt~~ / ~~Tiefpunkt~~ / Sattelpunkt.

- 4) Wenn  $f$  ein lokales Maximum hat, dann hat die Steigung von  $F$  an dieser Stelle ein lokales ~~Minimum~~ / Maximum.

Wenn  $f$  ein lokales Minimum hat, dann hat die Steigung von  $F$  an dieser Stelle ein lokales Minimum / ~~Maximum~~.

- 5) Skizziere oben den Graphen der Funktion  $F$  im Intervall  $[0; 8]$ .

Vieles deutet darauf hin, dass die **Integralfunktion**  $F$  eine **Stammfunktion** von  $f$  ist, also dass  $F' = f$  gilt.

Der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** bestätigt diese Vermutung.

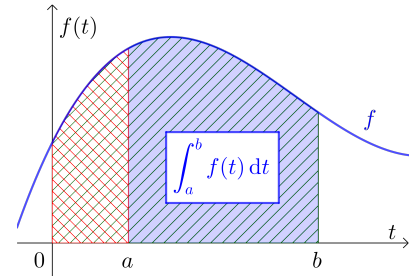
Für jede **stetige** Funktion  $f$  gilt der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**:

1) Die Funktion  $F$  mit

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

ist eine Stammfunktion von  $f$ .

Es gilt also  $F'(x) = f(x)$  an jeder Stelle  $x$ .



2) Mithilfe dieser Stammfunktion  $F$  können wir  $\int_a^b f(t) dt$  berechnen:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_0^b f(t) dt - \int_0^a f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Das bestimmte Integral von  $f$  in  $[a; b]$  ist also genau die **absolute Änderung** von  $F$  in  $[a; b]$ .

Die Funktion  $F$  ist die Stammfunktion von  $f$  mit  $F(0) = 0$ .

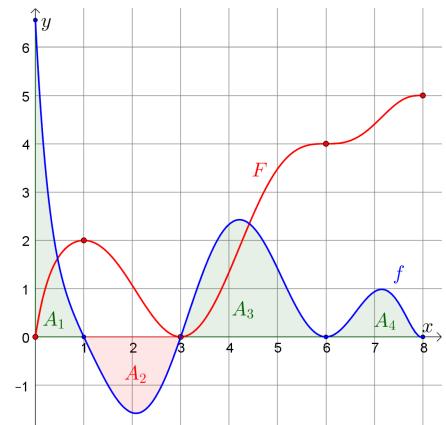
Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein:

$$\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = 2 - 0 = 2$$

$$\int_1^3 f(x) dx = F(3) - F(1) = 0 - 2 = -2$$

$$\int_3^6 f(x) dx = F(6) - F(3) = 4 - 0 = 4$$

$$\int_6^8 f(x) dx = F(8) - F(6) = 5 - 4 = 1$$



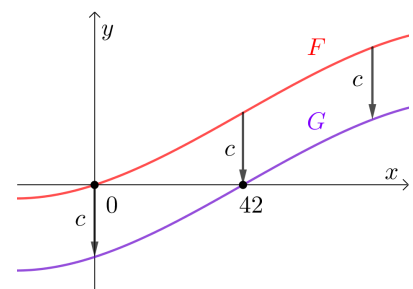
Tatsächlich ist die Funktion  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  für *jede* untere Grenze  $a \in \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f$ .

Die Stammfunktion  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  unterscheidet sich

zum Beispiel von  $G(x) = \int_{42}^x f(t) dt$  an jeder Stelle  $x$  nur

um eine Konstante  $c$ , die *nicht* von  $x$  abhängt, denn es gilt:

$$F(x) - G(x) = \int_0^x f(t) dt - \int_{42}^x f(t) dt = \int_0^{42} f(t) dt = c$$



Die Graphen der beiden Funktionen  $F$  und  $G$  unterscheiden sich also nur um eine Verschiebung um  $c$  Einheiten in vertikaler Richtung.

Die *Steigung* bleibt bei einer Verschiebung in vertikaler Richtung an jeder Stelle unverändert.

Es gilt also:  $G'(x) = F'(x) = f(x)$

Die Funktion  $G$  ist damit so wie  $F$  auch eine Stammfunktion von  $f$ .

Der Graph der Stammfunktion  $G(x) = \int_{42}^x f(t) dt$  ist vertikal so verschoben, dass  $G(42) = 0$  gilt.



Das bestimmte Integral  $\int_0^1 x^2 dx$  können wir zwar als Grenzwert von Obersummen berechnen.

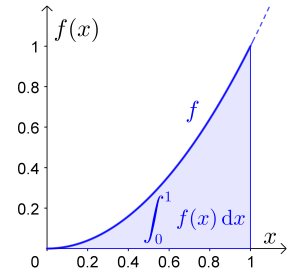
Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist die Berechnung aber deutlich kürzer:

- 1) Ermittle eine beliebige Stammfunktion  $F$  der Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2$ .

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3$$

- 2) Berechne das bestimmte Integral mit dem Hauptsatz:

$$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$



Schreibweise



Die folgende kürzere Schreibweise ist bei der Anwendung des Hauptsatzes üblich:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Geschwindigkeit-Zeit-Funktion



Die Geschwindigkeit eines Autos wird 14 Sekunden lang aufgezeichnet.

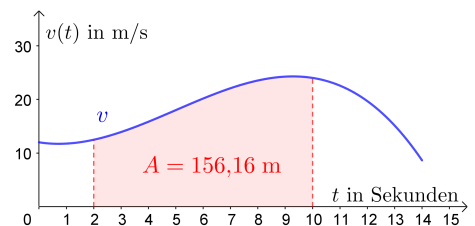
Der Graph der zugehörigen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion  $v$  ist rechts unten dargestellt. Dabei gilt:

$$v(t) = -0,04 \cdot t^3 + 0,6 \cdot t^2 - 0,8 \cdot t + 12$$

$t \dots$  Zeit in Sekunden ( $t \geq 0$ )

$v(t) \dots$  Geschwindigkeit des Autos zum Zeitpunkt  $t$  in m/s

- 1) Zeichne rechts eine Fläche mit Inhalt  $A = \int_2^{10} v(t) dt$  ein.



- 2) Berechne  $A$  mit dem Hauptsatz, und interpretiere das Ergebnis im Sachzusammenhang.

$$\int_2^{10} v(t) dt = -0,01 \cdot t^4 + 0,2 \cdot t^3 - 0,4 \cdot t^2 + 12 \cdot t \Big|_2^{10} = 180 - 23,84 = 156,16$$

Das Auto legt im Zeitintervall  $[2; 10]$  insgesamt 156,16 m zurück.

Orientierter Flächeninhalt



Rechts ist die Sinusfunktion dargestellt:  $f(x) = \sin(x)$

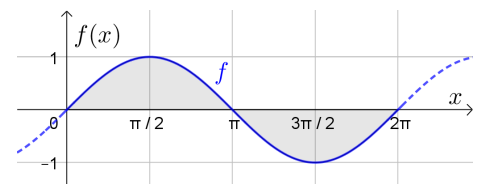
- a) Berechne  $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ . (Winkel im Bogenmaß)

- b) Berechne den Flächeninhalt, den der Graph von  $f$  im Intervall  $[0; 2 \cdot \pi]$  mit der  $x$ -Achse einschließt.

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{2\pi} = -1 - (-1) = 0$$

$$\text{b) } \int_0^{\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2 \quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_{\pi}^{2\pi} = -1 - 1 = -2$$

Die grau markierte Fläche hat also den Inhalt 4.

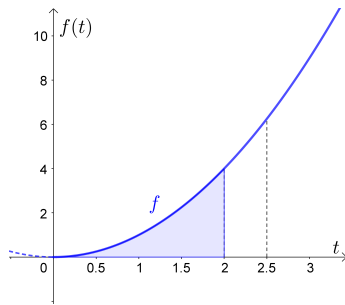


Der Graph von  $f(x) = x^2$  ist unten dargestellt. Wir betrachten die Integralfunktion  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

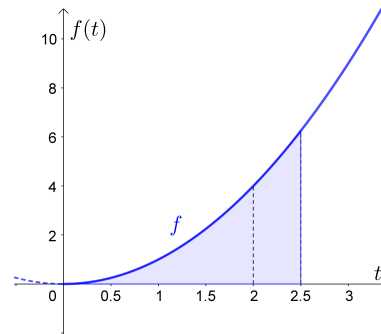
Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sagt aus, dass  $F'(x) = f(x) = x^2$  gilt.

Wir weisen jetzt ohne Verwendung des Hauptsatzes nach, dass tatsächlich  $F'(2) = f(2) = 4$  gilt.

Markiere die Fläche mit Inhalt  $F(2)$ :

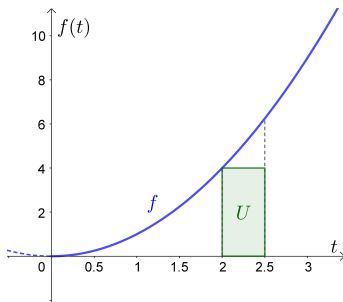


Markiere die Fläche mit Inhalt  $F(2,5)$ :

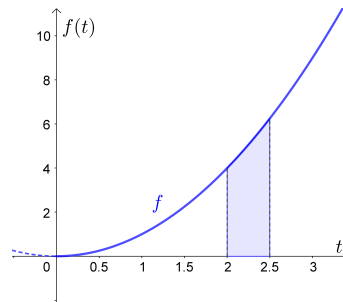


Berechne den Flächeninhalt  $U$ :

$$U = f(2) \cdot 0,5 = 2$$

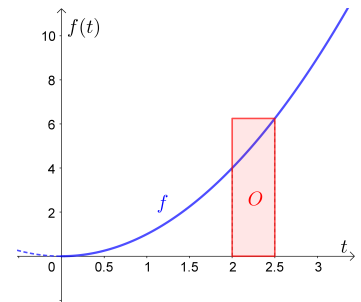


Markiere nun die Fläche mit Inhalt  $F(2,5) - F(2)$ :



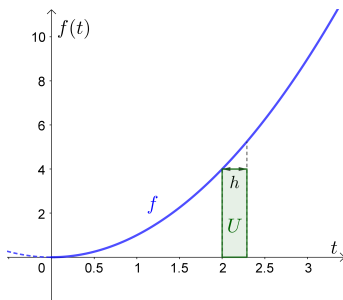
Berechne den Flächeninhalt  $O$ :

$$O = f(2,5) \cdot 0,5 = 3,125$$

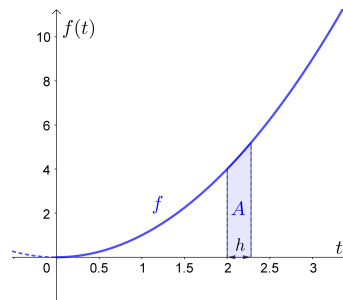


Statt der Breite 0,5 wählen wir jetzt eine variable, kleine Breite  $h > 0$ . Dann gilt:

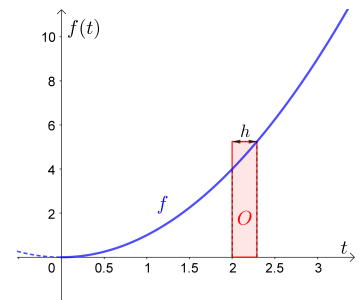
$$U = f(2) \cdot h$$



$$A = F(2+h) - F(2)$$



$$O = f(2+h) \cdot h$$



Wir dividieren die Ungleichung  $U \leq A \leq O$  durch  $h > 0$ :  $f(2) \leq \frac{F(2+h) - F(2)}{h} \leq f(2+h)$

Wir bilden den Grenzwert  $h \rightarrow 0$ . Dann gilt  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h) - F(2)}{h} = F'(2)$  und  $\lim_{h \rightarrow 0} f(2+h) = f(2)$ , weil  $f$  stetig ist.

Es folgt  $f(2) \leq F'(2) \leq f(2)$ , also muss tatsächlich  $F'(2) = f(2)$  gelten.

Die Monotonie von  $f$  vereinfacht die Begründung. **Tatsächlich** genügt es, wenn  $f$  eine stetige Funktion ist.

