Integralfunktion MmF

Der Graph einer stückweise linearen Funktion f ist im Intervall $[0; 9]$ dargestellt.

x	$F(x)$
0	0
1	2
2	4
3	6
4	7,5
5	8
6	7,5
7	6
8	4
9	2

Die Funktion F mit

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

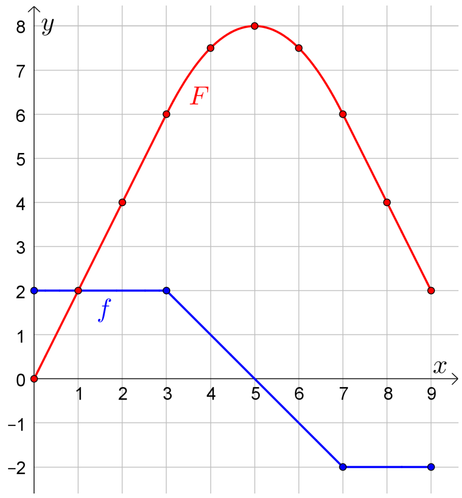
ist auch im Intervall $[0; 9]$ definiert.

1) Vervollständige links die Wertetabelle.

2) Den größten Funktionswert nimmt die Funktion F an der Stelle $x = 5$ an.

3) Skizziere rechts den Graphen der Funktion F im Intervall $[0; 9]$.

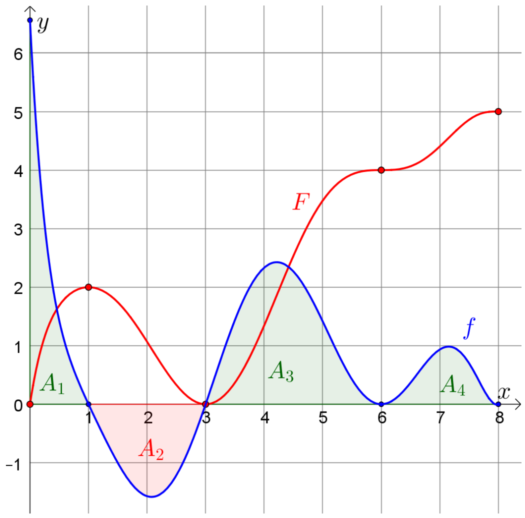
Die Funktion F heißt auch **Integralfunktion**.



Konstruktion einer Stammfunktion MmF

Die links unten dargestellten Flächen haben die Inhalte $A_1 = 2$, $A_2 = 2$, $A_3 = 4$ und $A_4 = 1$.

Die Funktion F mit $\boldsymbol{F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$ ist im Intervall $[0; 8]$ definiert.



1) Trage 5 verschiedene Wertepaare der Funktion F ein:

x	0	1	3	6	8
$F(x)$	0	2	0	4	5

Streiche bei **2)**, **3)** und **4)** jeweils passend durch.

2) Wenn in einem Intervall $f(x) > 0$ gilt, dann ist F in diesem Intervall streng monoton steigend / ~~fallend~~.

Wenn in einem Intervall $f(x) < 0$ gilt, dann ist F in diesem Intervall streng monoton ~~steigend~~ / fallend.

3) Im Punkt $(1 \mid 2)$ hat F einen Hochpunkt / ~~Tiefpunkt~~ / ~~Sattelpunkt~~.

Im Punkt $(3 \mid 0)$ hat F einen ~~Hochpunkt~~ / Tiefpunkt / ~~Sattelpunkt~~.

Im Punkt $(6 \mid 4)$ hat F einen ~~Hochpunkt~~ / ~~Tiefpunkt~~ / Sattelpunkt.

4) Wenn f ein lokales Maximum hat, dann hat die *Steigung* von F an dieser Stelle ein lokales ~~Minimum~~ / Maximum.

Wenn f ein lokales Minimum hat, dann hat die *Steigung* von F an dieser Stelle ein lokales Minimum / ~~Maximum~~.

5) Skizziere oben den Graphen der Funktion F im Intervall $[0; 8]$.

Vieles deutet darauf hin, dass die **Integralfunktion F** eine **Stammfunktion von f** ist, also dass $\boldsymbol{F' = f}$ gilt.

Der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** bestätigt diese Vermutung.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

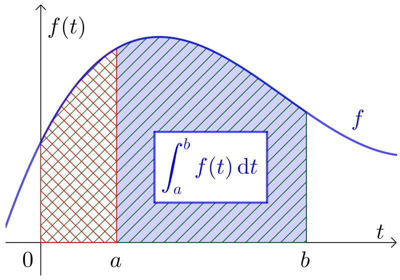
Für jede stetige Funktion f gilt der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**:

1) Die Funktion F mit

$$\boldsymbol{F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$$

ist eine Stammfunktion von f.

Es gilt also $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$ an jeder Stelle x.



2) Mithilfe dieser Stammfunktion F können wir $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ berechnen:

$$\boldsymbol{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t} = \int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{F(b)} - \boldsymbol{F(a)}$$

Das bestimmte Integral von f in $[a;b]$ ist also genau die absolute Änderung von F in $[a;b]$.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

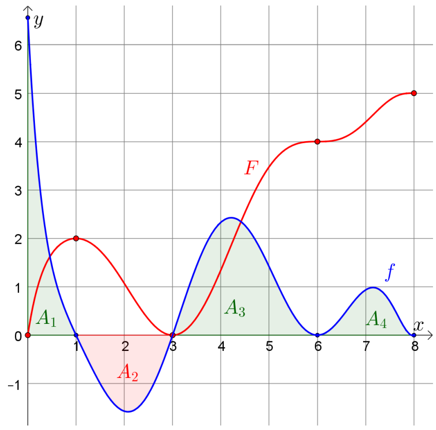
Die Funktion F ist die Stammfunktion von f mit $F(0) = 0$.
Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = 2 - 0 = 2$$

$$\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(1) = 0 - 2 = -2$$

$$\int_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x = F(6) - F(3) = 4 - 0 = 4$$

$$\int_6^8 f(x)\,\mathrm{d}x = F(8) - F(6) = 5 - 4 = 1$$



Startwert

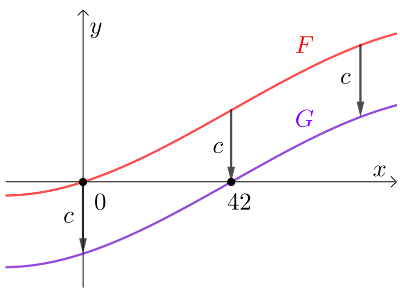
Tatsächlich ist die Funktion $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ für *jede* untere Grenze $a \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f.

Die Stammfunktion $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unterscheidet sich

zum Beispiel von $G(x) = \int_{42}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ an jeder Stelle x nur

um eine Konstante c, die *nicht* von x abhängt, denn es gilt:

$$F(x) - G(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{42}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{42} f(t)\,\mathrm{d}t = c$$



Die Graphen der beiden Funktionen F und G unterscheiden sich also nur um eine Verschiebung um c Einheiten in vertikaler Richtung.

Die *Steigung* bleibt bei einer Verschiebung in vertikaler Richtung an jeder Stelle unverändert.

Es gilt also: $G'(x) = F'(x) = f(x)$

Die Funktion G ist damit so wie F auch eine Stammfunktion von f.

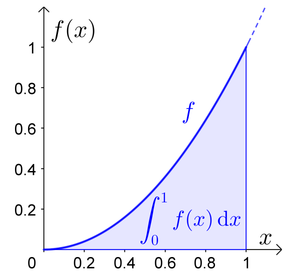
Der Graph der Stammfunktion $G(x) = \int_{42}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ist vertikal so verschoben, dass $G(42) = 0$ gilt.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Das bestimmte Integral $\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$ können wir zwar als Grenzwert von Obersummen berechnen.

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist die Berechnung aber deutlich kürzer:

1) Ermittle eine beliebige Stammfunktion F der Funktion f mit $f(x) = x^2$.



$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3$$

2) Berechne das bestimmte Integral mit dem Hauptsatz:

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Schreibweise

Die folgende kürzere Schreibweise ist bei der Anwendung des Hauptsatzes üblich:

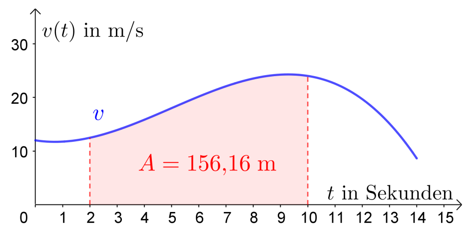
$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Geschwindigkeit-Zeit-Funktion

Die Geschwindigkeit eines Autos wird 14 Sekunden lang aufgezeichnet.
Der Graph der zugehörigen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v ist rechts unten dargestellt. Dabei gilt:

$$v(t) = -0{,}04 \cdot t^3 + 0{,}6 \cdot t^2 - 0{,}8 \cdot t + 12$$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden $(t \geq 0)$
$v(t) \ldots$ Geschwindigkeit des Autos zum Zeitpunkt t in m/s



1) Zeichne rechts eine Fläche mit Inhalt $A = \int_2^{10} v(t) \, \mathrm{d}t$ ein.

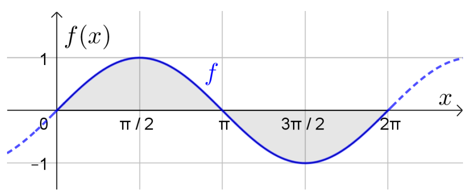
2) Berechne A mit dem Hauptsatz, und interpretiere das Ergebnis im Sachzusammenhang.

$$\int_2^{10} v(t) \, \mathrm{d}t = -0{,}01 \cdot t^4 + 0{,}2 \cdot t^3 - 0{,}4 \cdot t^2 + 12 \cdot t \Big|_2^{10} = 180 - 23{,}84 = 156{,}16$$

Das Auto legt im Zeitintervall $[2; 10]$ insgesamt 156,16 m zurück.

Orientierter Flächeninhalt

Rechts ist die Sinusfunktion dargestellt: $f(x) = \sin(x)$



a) Berechne $\int_0^{2\cdot\pi} f(x) \, \mathrm{d}x$. (Winkel im Bogenmaß)

b) Berechne den Flächeninhalt, den der Graph von f im Intervall $[0; 2 \cdot \pi]$ mit der x-Achse einschließt.

a) $\int_0^{2\cdot\pi} \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\cos(x) \Big|_0^{2\cdot\pi} = -1 - (-1) = 0$

b) $\int_0^{\pi} \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\cos(x) \Big|_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2$ $\qquad \int_\pi^{2\cdot\pi} \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\cos(x) \Big|_\pi^{2\cdot\pi} = -1 - 1 = -2$

Die grau markierte Fläche hat also den Inhalt 4.

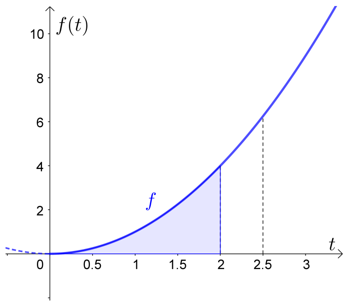
Was steckt hinter dem Hauptsatz?

Der Graph von $f(x) = x^2$ ist unten dargestellt. Wir betrachten die Integralfunktion $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

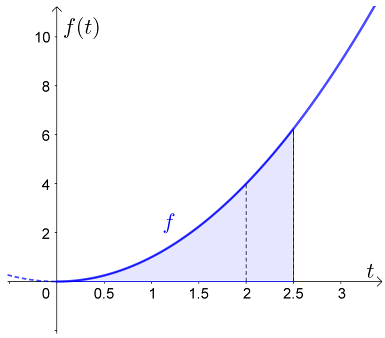
Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sagt aus, dass $F'(x) = f(x) = x^2$ gilt.

Wir weisen jetzt ohne Verwendung des Hauptsatzes nach, dass tatsächlich $F'(2) = f(2) = 4$ gilt.

Markiere die Fläche mit Inhalt $F(2)$:

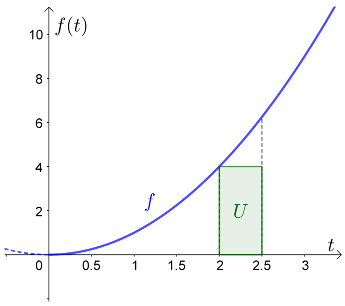


Markiere die Fläche mit Inhalt $F(2{,}5)$:

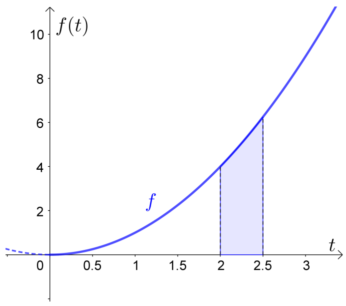


Berechne den Flächeninhalt U:

$U = f(2) \cdot 0{,}5 = 2$

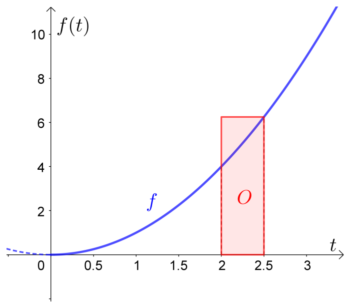


Markiere nun die Fläche mit Inhalt $F(2{,}5) - F(2)$:



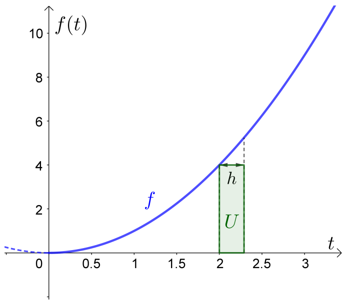
Berechne den Flächeninhalt O:

$O = f(2{,}5) \cdot 0{,}5 = 3{,}125$

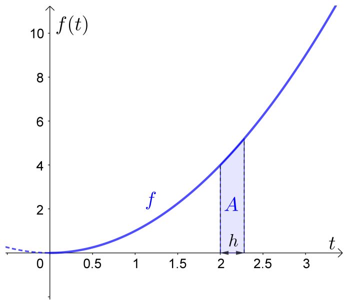


Statt der Breite 0,5 wählen wir jetzt eine variable, kleine Breite $h > 0$. Dann gilt:

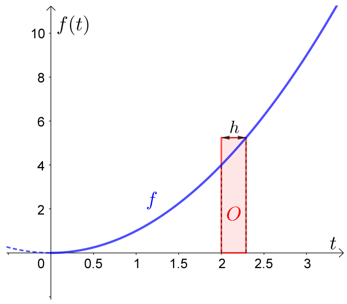
$U = f(2) \cdot h$



$A = F(2+h) - F(2)$



$O = f(2+h) \cdot h$



Wir dividieren die Ungleichung $U \leq A \leq O$ durch $h > 0$: $\quad f(2) \leq \dfrac{F(2+h) - F(2)}{h} \leq f(2+h)$

Wir bilden den Grenzwert $h \to 0$. Dann gilt $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(2+h) - F(2)}{h} = F'(2)$ und $\lim\limits_{h\to 0} f(2+h) = f(2)$, weil f stetig ist.

Es folgt $f(2) \leq F'(2) \leq f(2)$, also muss tatsächlich $F'(2) = f(2)$ gelten.

Die Monotonie von f vereinfacht die Begründung. Tatsächlich genügt es, wenn f eine stetige Funktion ist.