



Die Funktion  $h$  ist die Verkettung zweier **differenzierbaren** Funktionen  $f$  und  $g$ :

$$h(x) = f(g(x))$$

Die **Ableitungsfunktion** von  $h$  können wir systematisch mit der **Kettenregel** ermitteln:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ermittle eine Gleichung der Ableitungsfunktion  $h'$  von  $h(x) = \cos(x^2)$ .

$$h'(x) = \boxed{\phantom{f'(g(x)) \cdot g'(x)}}$$



Die innere Funktion der verketteten Funktion  $h$  ist **linear**.

Ermittle die Gleichung der Ableitungsfunktion  $h'$  mit der Kettenregel.

Ermittle die Gleichung einer **Stammfunktion**  $H$  durch Umkehrung der Kettenregel.

a)  $h(x) = e^{4x-2}$

b)  $h(x) = \sin(3 \cdot x + 1)$

$$h'(x) = \boxed{\phantom{f'(g(x)) \cdot g'(x)}}$$

$$h'(x) = \boxed{\phantom{f'(g(x)) \cdot g'(x)}}$$

$$H(x) = \boxed{\phantom{f(g(x)) \cdot a}}$$

$$H(x) = \boxed{\phantom{f(g(x)) \cdot a}}$$



Es gibt *keine* Rechenregel, um im Allgemeinen aus einer verketteten Funktion  $h$  systematisch eine Funktionsgleichung einer Stammfunktion  $H$  zu ermitteln.

- a) Für die Funktion  $h$  mit  $h(x) = e^{x^2}$  lässt sich mit den **elementaren Funktionen** *keine* Stammfunktion  $H$  ermitteln.
- b) Für die Funktion  $h$  mit  $h(x) = 4 \cdot x \cdot e^{x^2}$  lässt sich mit den elementaren Funktionen eine Stammfunktion  $H$  ermitteln. Die Funktion  $h$  ist nämlich das Ergebnis der Anwendung einer Kettenregel.
- 1) Begründe, warum die Funktion  $N$  mit  $N(x) = e^{x^2}$  *keine* Stammfunktion von  $h$  ist.
  - 2) Passe die Funktionsgleichung von  $N$  an, um eine Stammfunktion  $H$  von  $h$  zu ermitteln.



Wenn eine Funktion  $h$  die Form

$$h(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot a \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

hat, dann können wir durch Umkehrung der Kettenregel eine Stammfunktion  $H$  ermitteln:

$$H(x) = f(g(x)) \cdot a$$

Die Funktion  $h$  mit  $h(x) = 4 \cdot x \cdot e^{x^2}$  hat diese Form  $h(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot a$ , weil die Ableitung der inneren Funktion  $x^2$  bis auf einen konstanten Faktor mit  $4 \cdot x$  übereinstimmt.

In so einem Fall hat sich zur systematischen Ermittlung einer Stammfunktion  $H$  von  $h$  im Laufe der Geschichte die folgende Schreibweise (**Integration durch Substitution**) eingebürgert:

- i) Ersetze („substituiere“) die innere Funktion durch eine Funktion  $u$ :  $u(x) = x^2$   
 ii) Ermittle die Ableitung  $u'$  in der Differential-Schreibweise  $u'(x) = \frac{du}{dx}$ , und forme nach  $dx$  um:

$$\frac{du}{dx} = 2 \cdot x \implies dx = \frac{du}{2 \cdot x}$$

- iii) Ersetze im unbestimmten Integral  $\int h(x) dx$  mithilfe von ii) den Ausdruck  $dx$ , und kürze:

$$H(x) = \int 4 \cdot x \cdot e^{x^2} dx = \int 4 \cdot x \cdot e^u \cdot \frac{du}{2 \cdot x} = 2 \cdot \int e^u du$$

- iv) Integriere nach  $u$ , und ersetze beim Ergebnis wieder  $u(x) = x^2$ :

$$H(x) = 2 \cdot \int e^u du = 2 \cdot e^u + c = 2 \cdot e^{x^2} + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

Wir kontrollieren das Ergebnis mit der Kettenregel:  $H'(x) = 2 \cdot e^{x^2} \cdot (2 \cdot x) = 4 \cdot x \cdot e^{x^2} = h(x) \checkmark$

Ermittle das unbestimmte Integral durch eine Substitution.

a)  $\int 2 \cdot \cos(x^4 + 7) \cdot x^3 dx$      $u = \boxed{\phantom{0000}} \implies \frac{du}{dx} = \boxed{\phantom{0000}} \implies dx = \boxed{\phantom{0000}}$   
 $\implies \int 2 \cdot \cos(x^4 + 7) \cdot x^3 dx =$

b)  $\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx$      $u = \boxed{\phantom{0000}} \implies \frac{du}{dx} = \boxed{\phantom{0000}} \implies dx = \boxed{\phantom{0000}}$   
 $\implies \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx =$

c)  $\int \frac{\sin(\ln(x))}{5 \cdot x} dx$      $u = \boxed{\phantom{0000}} \implies \frac{du}{dx} = \boxed{\phantom{0000}} \implies dx = \boxed{\phantom{0000}}$   
 $\implies \int \frac{\sin(\ln(x))}{5 \cdot x} dx =$

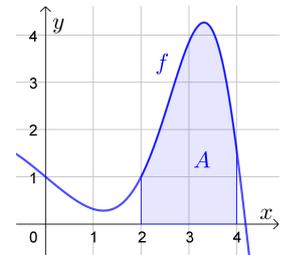


Eine Stammfunktion  $H$  von  $h(x) = 3 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$  kann man mit **partieller Integration** ermitteln. Da die Ableitung von  $\sin(x)$  bis auf einen konstanten Faktor mit  $3 \cdot \cos(x)$  übereinstimmt, ist auch die Substitution  $u(x) = \sin(x)$  zielführend. Ermittle jene Stammfunktion  $H$  von  $h$ , die  $H(0) = 5$  erfüllt.



Für die rechts dargestellte Funktion  $f$  gilt:  $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{x^2}{4} - 1\right) + 1$

Entscheide mit dem **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**, ob für den dargestellten Flächeninhalt  $A < 6$ ,  $A = 6$  oder  $A > 6$  gilt.



Philipp berechnet das bestimmte Integral  $\int_2^4 e^{2 \cdot x - 5} dx$  mit einer Substitution:

$$u = 2 \cdot x - 5 \implies \frac{du}{dx} = 2 \implies dx = \frac{du}{2}$$

$$\implies \int_2^4 e^{2 \cdot x - 5} dx = \int_{\boxed{\phantom{0}}}^{\boxed{\phantom{0}}} e^u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \cdot e^u \Big|_{\boxed{\phantom{0}}}^{\boxed{\phantom{0}}} = \frac{1}{2} \cdot e^{2 \cdot x - 5} \Big|_2^4 = 10,042... - 0,183... = 9,858...$$

Trage richtige Integrationsgrenzen in die Kästchen ein.

Hinweis: Verfolge die Rechnung von rechts nach links zurück.

