☆ ARBEITSBLATT – INTEGRIEREN WIE FERMAT

Auf diesem Arbeitsblatt haben wir vom Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung noch nie gehört. Wir kennen den Begriff des bestimmten Integrals und wissen über Ober- und Untersummen Bescheid. Wir lieben die geometrische Summenformel

$$1 + q + \ldots + q^k + \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

für $q \neq 1$ und wissen, dass, wenn $|\,q\,| < 1$, gilt:

$$1 + q + \ldots + q^k + \ldots = \frac{1}{1 - q}$$

Schließlich ist ja in diesem Fall

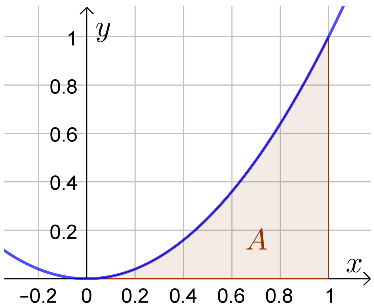
$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

1. Methode der geometrischen Unterteilung

Wir interessieren uns für den Wert

$$A = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x,$$

also den Flächeninhalt zwischen der horizontalen Achse und dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ zwischen den Abszissen 0 und 1:



Archimedes von Syrakus hat den Wert von A bereits vor 2300 Jahren berechnet:

$$A = \frac{1}{3}$$

Auf diesem Arbeitsblatt stellen wir eine Methode des Mathematikers Pierre de Fermat vor, mit dem man den Inhalt dieses Flächenstücks und den vieler anderer berechnen kann. Zur Zeit des im 17. Jahrhundert lebenden Fermats war der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ebenso wenig bekannt wie bei uns hier.

Datum: 5. Juni 2019.

Sei dazu $q \in]0;1[$ beliebig aber fest. Wir denken uns q jetzt schon sehr nahe bei 1.

Wir unterteilen das Intervall $[0;1]$ *geometrisch* an den Stellen

$$0 < q^n < q^{n-1} < \cdots < q^{k+1} < q^k < \cdots < q^2 < q < 1.$$

Der Abstand

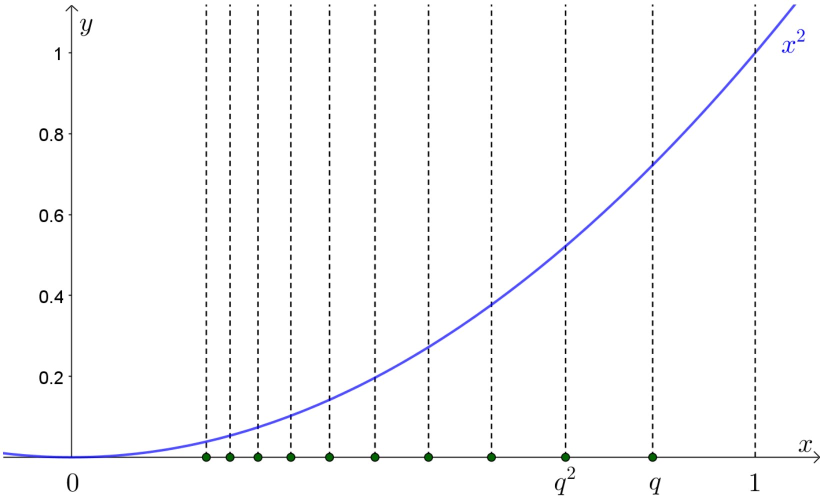
$$q^k - q^{k+1} = q^k \cdot (1-q)$$

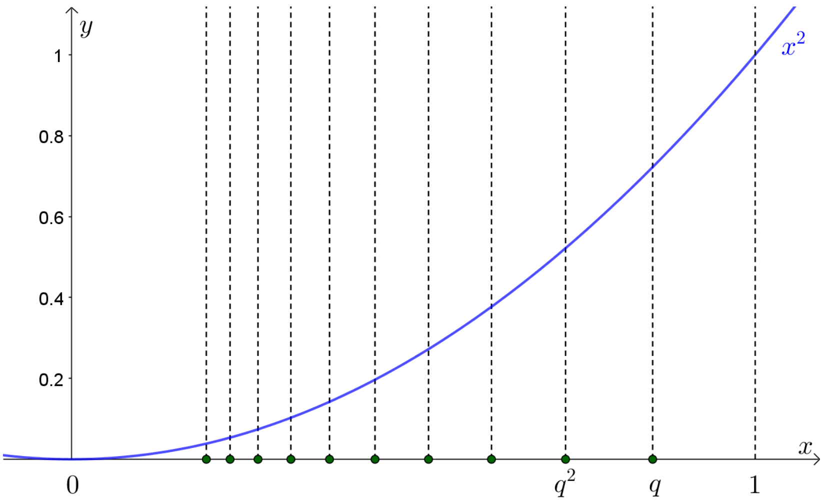
zweier aufeinanderfolgender solcher Stellen q^{k+1} und q^k ist weniger als $1-q$. Siehst du das ein?

Veranschauliche in den Bildern unten, was mit den beiden Ausdrücken

$$U(n,q) = q^n \cdot 0 + (q^{n-1} - q^n) \cdot q^{2\cdot n} + \cdots + (q^k - q^{k+1}) \cdot q^{2\cdot(k+1)} + \cdots + (q - q^2) \cdot q^4 + (1-q) \cdot q^2$$
$$O(n,q) = q^n \cdot q^{2\cdot n} + (q^{n-1} - q^n) \cdot q^{2\cdot(n-1)} + \cdots + (q^k - q^{k+1}) \cdot q^{2\cdot k} + \cdots + (q - q^2) \cdot q^2 + (1-q) \cdot 1^2$$

im Zusammenhang mit dem gesuchten Flächeninhalt berechnet wird. In den Bildern ist $n = 10$ und $q = 0{,}85$.





Zeige, dass gilt:

$$U(n,q) = (1-q)\cdot\frac{1-q^{3\cdot n}}{1-q^3}\cdot q^2 \qquad \text{und} \qquad O(n,q) = (1-q)\cdot\frac{1-q^{3\cdot n}}{1-q^3} + q^{3\cdot n}$$

Wir nehmen jetzt die Zahl der Unterteilungen n immer größer. Erkläre die folgende Abschätzung:

$$\frac{1-q}{1-q^3}\cdot q^2 \leq A \leq \frac{1-q}{1-q^3}$$

Tipp: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

Was geschieht, wenn wir q an 1 heran rücken? Zeige, dass folgt:

$$A = \frac{1}{3}$$

Tipp: $1-q^3 = (1-q)\cdot(1+q+q^2)$

2. Weitere Aufgabenstellungen

2.1. Berechne die gesuchten Flächeninhalte mit der Methode der geometrischen Unterteilung.

a) $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$ **c)** $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$ **d)** $\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$ $n\in\mathbb{Z},\, n\geq 1$

2.2. Erkläre ohne Rechnung, weshalb für alle ganzen Zahlen $n \geq 1$ gilt:

$$\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \sqrt[n]{x}\,\mathrm{d}x = 1$$

2.3. Zeige mit der Methode der geometrischen Unterteilung, dass für alle ganzen Zahlen $n \geq 1$ gilt:

$$\int_1^{2^n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \geq \frac{n}{2}$$

Erkläre damit anschaulich, dass

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty.$$