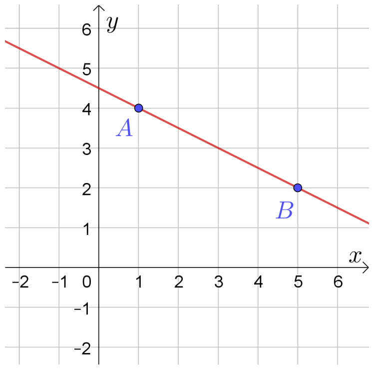
Lineare Interpolation

Rechts unten sind zwei Punkte A und B mit verschiedenen x-Koordinaten dargestellt.
Es gibt genau eine lineare Funktion f, deren Graph durch A und B verläuft.



1) Zeichne den Funktionsgraphen rechts ein.

2) Ermittle eine Funktionsgleichung von f.

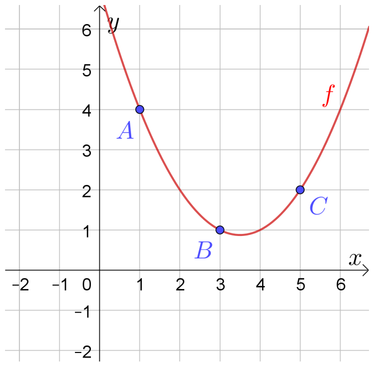
$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{9}{2}$$

3) Vom Punkt P ist die x-Koordinate bekannt. Berechne mithilfe von f durch **lineare Interpolation** die y-Koordinate von P.

$P = (4{,}2 \mid 2{,}4)$

Quadratische Interpolation

Rechts unten sind drei Punkte A, B und C mit paarweise verschiedenen x-Koordinaten dargestellt, die *nicht* auf einer Gerade liegen. Es gibt genau eine quadratische Funktion $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, deren Graph durch A, B und C verläuft.



1) Stelle ein Gleichungssystem zur Berechnung von a, b und c auf.

$$\text{I}: f(1) = 4 \qquad \text{II}: f(3) = 1 \qquad \text{III}: f(5) = 2$$

2) Ermittle a, b und c mit Technologieeinsatz.

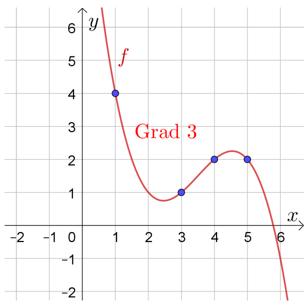
$$a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{7}{2},\ c = 7$$

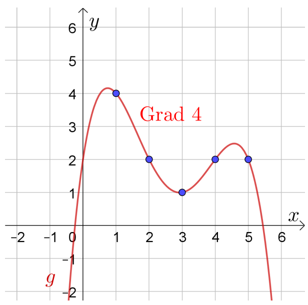
3) Ermittle jene x-Koordinate in $[1; 5]$ so, dass der Punkt P am Funktionsgraphen liegt.

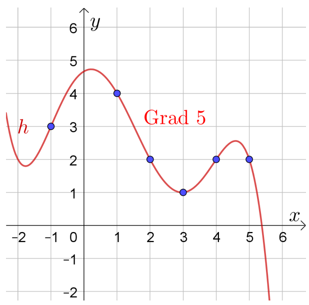
$P = (1{,}811... \mid 2{,}3)$

Polynominterpolation

Allgemein können wir durch $n + 1$ Punkte an verschiedenen Stellen eine Polynomfunktion legen.
Dafür reicht eine Polynomfunktion, deren Grad höchstens n ist.







Ermittle eine Funktionsgleichung der rechts oben dargestellten Polynomfunktion h vom Grad 5.
In GeoGebra kannst du dafür auch den Befehl **TrendPoly**(<Liste von Punkten>, <Grad des Polynoms>) verwenden.

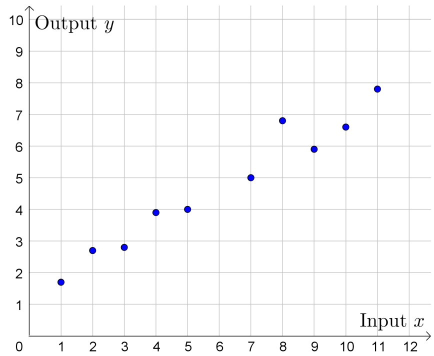
$$h(x) = -\frac{1}{45} \cdot x^5 + \frac{1}{6} \cdot x^4 - \frac{1}{18} \cdot x^3 - \frac{4}{3} \cdot x^2 + \frac{26}{45} \cdot x + \frac{14}{3}$$

Modellierung

Wir führen eine Messreihe durch.
Abhängig vom Input x erhalten wir einen Output y als Messwert.

Die Messergebnisse sind rechts dargestellt.

Mit welchem Output y rechnest du ungefähr,
wenn der Input $x = 6$ ist?



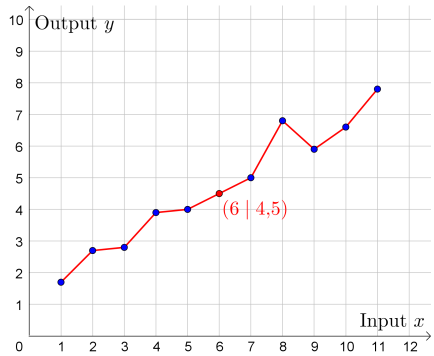
Stückweise lineare Interpolation

Rechts arbeiten wir mit **stückweise linearer Interpolation**.

Wir verbinden dabei von links nach rechts benachbarte Messpunkte durch eine Strecke.

So erhalten wir den Graphen einer stückweise linearen Funktion.

Beim Input $x = 6$ sagen wir mit stückweise linearer Interpolation den Output $y = 4{,}5$ voraus.



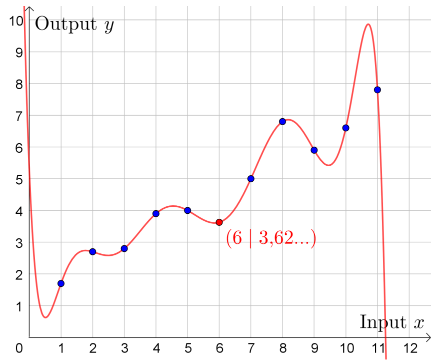
Overfitting

Rechts arbeiten wir mit Polynominterpolation.

Wir legen also eine Polynomfunktion *exakt* durch die Messpunkte.

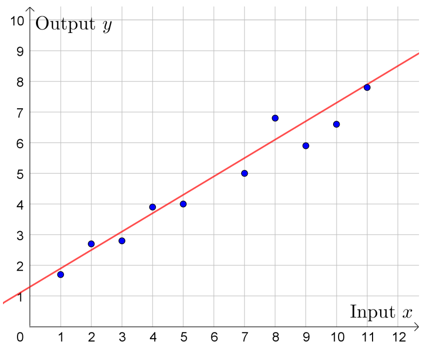
Beim Input $x = 6$ sagen wir mit Polynominterpolation
den Output $y = 3{,}62...$ voraus.

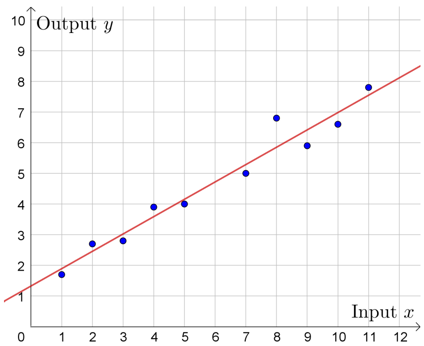
An den Stellen $x = 0{,}1$ und $x = 10{,}5$ macht diese
Polynomfunktion aber vermutlich *keine* guten Voraussagen.

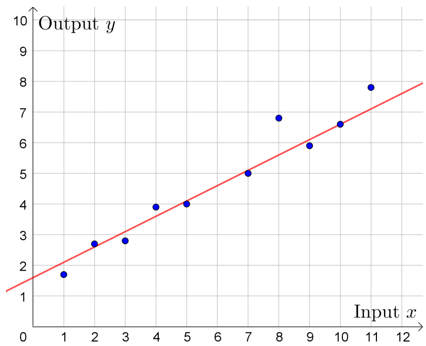


Lineare Regression

Bei **linearer Regression** legen wir die *bestmögliche* lineare Funktion durch die Punktwolke.
Welche der 3 dargestellten linearen Funktionen passt aus deiner Sicht am besten?







Regressionsgerade / Lineare Ausgleichsfunktion

Wir sind auf der Suche nach *einer* Gerade, die den Zusammenhang zwischen Input und Output unter Berücksichtigung aller Messpunkte *am besten* beschreibt.

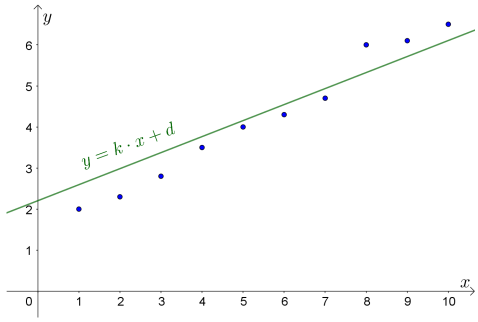
Rechts haben wir eine Gerade $y = k \cdot x + d$ durch die Punktwolke gelegt.

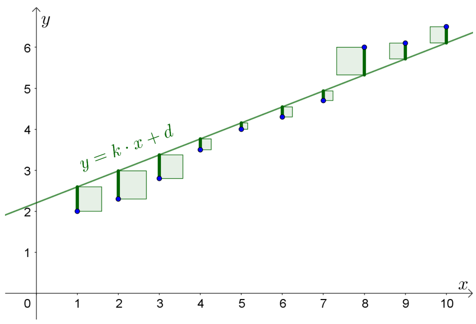
Die eingezeichnete Gerade ist gut, aber nicht perfekt.

Sollen wir die Steigung k größer oder kleiner wählen?
Sollen wir die Gerade vertikal verschieben?

Dazu müssen wir festlegen, was wir mit *am besten* meinen.

Wie sollen wir den „Fehler“ quantifizieren?





Um die sogenannte **Fehlerquadratsumme** zu ermitteln, berechnen wir zuerst die vertikalen Abstände der Messpunkte von der Gerade:

0,595	0,685	0,575	0,265	0,155
0,245	0,235	0,675	0,385	0,395

Die **Fehlerquadratsumme F** ist die Summe der Quadrate dieser Abstände.

Links siehst du die Fehlerquadrate veranschaulicht.

Für die Fehlerquadratsumme dieser Gerade gilt: $F = 0{,}595^2 + 0{,}685^2 + \cdots + 0{,}395^2 = 2{,}12325$

Die Fehlerquadratsumme hängt von der Gerade ab, die wir durch die Punktwolke legen. $F(k; d)$

Je kleiner die Fehlerquadratsumme, desto besser ist die Gerade an die Punktwolke angepasst.

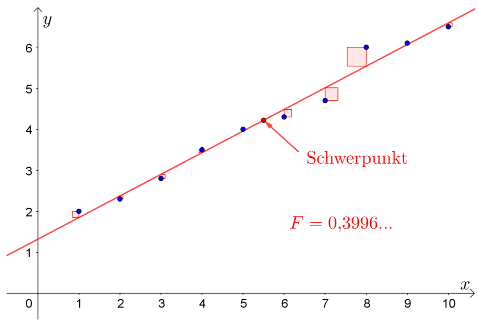
Die *bestmögliche* Gerade ist jene mit der kleinsten Fehlerquadratsumme.

Man kann die beiden folgenden Aussagen beweisen:

1) Zu jeder Punktwolke mit n Punkten gibt es *genau eine* bestmögliche Gerade ($n \geq 2$).

2) Diese bestmögliche Gerade verläuft durch den **Schwerpunkt $(\bar{x} \mid \bar{y})$** der Punktwolke.

$\bar{x}$ ist das arithmetische Mittel der x-Koordinaten aller Messpunkte.
$\bar{y}$ ist das arithmetische Mittel der y-Koordinaten aller Messpunkte.



Diese Gerade durch die Punktwolke mit der kleinsten Fehlerquadratsumme heißt **Regressionsgerade**.
Die zugehörige lineare Funktion heißt **lineare Ausgleichsfunktion**.

Von einer Schülergruppe wurden die jeweilige Lernzeit (in Minuten) und die erreichte Punktezahl bei einer Leistungsüberprüfung notiert:

Lernzeit in Minuten	20	34	27	18	16	23	32	22
erreichte Punktezahl	64	84	88	72	61	70	92	77

1) Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Regressionsgeraden. (Die erreichte Punktezahl soll in Abhängigkeit von der Lernzeit beschrieben werden.)

2) Interpretieren Sie die Steigung der Regressionsgeraden in diesem Sachzusammenhang.

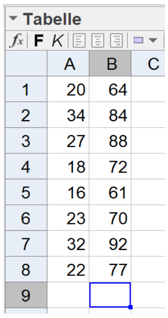
3) Berechnen Sie mithilfe dieses Modells, welche Punktezahl man erwarten kann, wenn man 30 Minuten lernt.

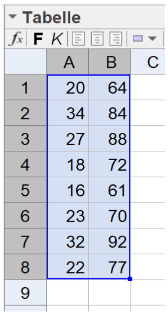
Lineare Regression MmF

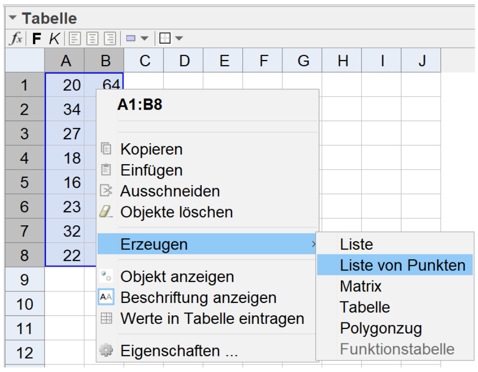
i) Tabellenansicht öffnen (Ansicht → Tabelle)

ii) Daten eingeben (Unabhängige Größe x in Spalte A, Abhängige Größe y in Spalte B)

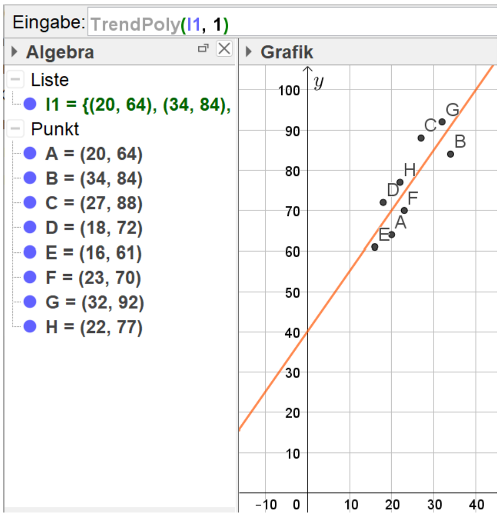
iii) Daten markieren → Rechtsklick → Erzeugen → Liste von Punkten







iv) Lineare Ausgleichsfunktion ermitteln: **TrendPoly**(<Liste von Punkten>, <Grad des Polynoms>)



1) $f(x) = 1{,}496... \cdot x + 40{,}08...$

2) Interpretation der Steigung:

Gemäß diesem Modell erreicht man pro zusätzlich gelernter Minute um rund 1,5 Punkte mehr.

3) Punktezahl bei 30 Minuten Lernzeit:

$f(30) = 84{,}9...$ Punkte

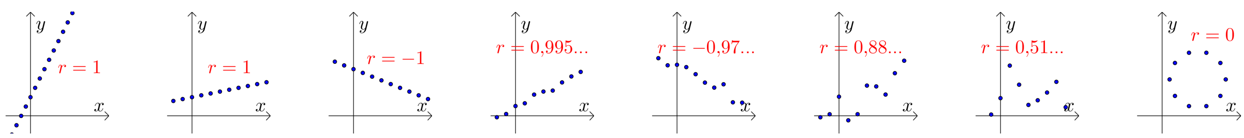
Korrelationskoeffizient nach Pearson MmF

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ sind n Wertepaare. $\bar{x}$ bzw. $\bar{y}$ ist das arithmetische Mittel der x_i bzw. y_i.
Der **empirische Korrelationskoeffizient r** misst den Grad des linearen Zusammenhangs.

Er hat folgende Eigenschaften:

$$r = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

- $-1 \leq r \leq 1$
- $r = 1 \iff$ *Alle* Punkte liegen auf *einer* Gerade mit positiver Steigung.
- $r = -1 \iff$ *Alle* Punkte liegen auf *einer* Gerade mit negativer Steigung.
- Ein Korrelationskoeffizient nahe bei 1 bzw. -1 bedeutet einen starken positiven bzw. negativen linearen Zusammenhang. Sprechweise: „Die Daten korrelieren."



KorrelationsKoeffizient(<Liste von Punkten>)

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Der Gesamtumsatz von Fairtrade-Produkten in Österreich ist in den letzten Jahren deutlich gestiegen:

Jahr	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
jährlicher Gesamtumsatz in Millionen (Mio.) Euro	53	65	72	87	100	107	130

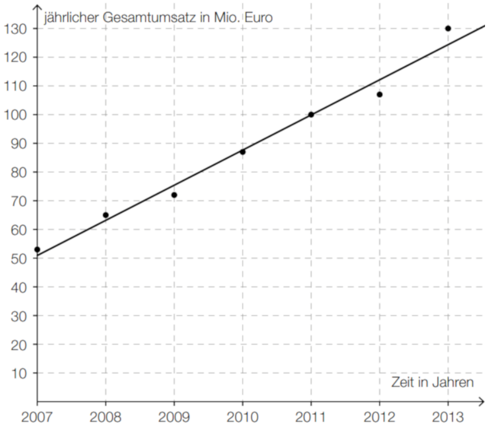
Quelle: http://www.fairtrade.at/fileadmin/AT/Materialien/2013_FAIRTRADE_Inside_Zahlen_Fakten.pdf [05.09.2016].

Die nachstehende Abbildung zeigt diese Gesamtumsatzentwicklung.
Der jährliche Gesamtumsatz soll in Abhängigkeit von der Zeit beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie mithilfe der gegebenen Daten eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2007.

$$f(t) = 12{,}25 \cdot t + 50{,}96...$$

t ... Zeit in Jahren ($t = 0$ entspricht dem Jahr 2007)
$f(t)$ ... jährlicher Gesamtumsatz zur Zeit t in Mio. Euro



2) Zeichnen Sie den Graphen der Regressionsfunktion im nebenstehenden Koordinatensystem ein.

3) Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die lineare Regressionsfunktion ein geeignetes Modell zur Beschreibung der Gesamtumsatzentwicklung ist.

4) Berechnen Sie anhand dieses Modells den zu erwartenden jährlichen Gesamtumsatz im Jahr 2020.

Der Korrelationskoeffizient $r = 0{,}9908...$ liegt nahe bei 1.
Es besteht also ein starker positiver linearer Zusammenhang zwischen den Daten.

$f(13) = 210{,}2...$ Mio. Euro Gesamtumsatz sind gemäß dem Modell im Jahr 2020 zu erwarten.

Korrelation $\neq$ Kausalität MmF

Eine Korrelation bedeutet *nicht* automatisch einen kausalen Zusammenhang (Ursache $\rightarrow$ Wirkung). Zum Beispiel gibt es folgende Korrelationen:

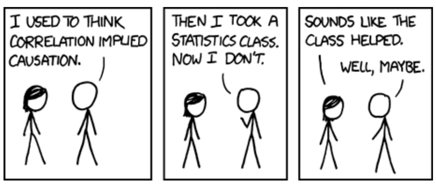
a) „Je mehr Feuerwehrpersonen zum Einsatz kommen, desto größer ist der Schaden.“

b) „Je höher die Verkaufszahlen von Eis in Kalifornien, desto größer ist die Anzahl der Haiattacken.“

Was könnte jeweils ein Grund für die Korrelation sein? Nimm dazu Stellung.

a) Andere Ursache: Je größer der Brand, desto größer der Schaden. Bei größeren Bränden müssen mehr Feuerwehrpersonen zum Einsatz kommen.

b) Andere Ursache: Hohe Temperaturen verursachen hohe Verkaufszahlen von Eis und viele Personen im Wasser.



Quelle: https://xkcd.com/552

Weitere Ausgleichsfunktionen MmF

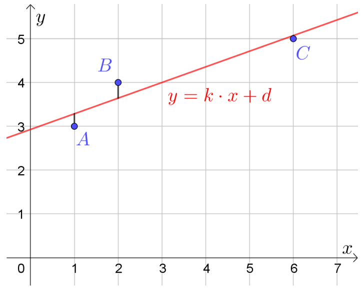
Quadratische Ausgleichsfunktion:	**TrendPoly**(<Liste von Punkten>, 2)	$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
Kubische Ausgleichsfunktion:	**TrendPoly**(<Liste von Punkten>, 3)	$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
Exponentielle Ausgleichsfunktion:	**TrendExp**(<Liste von Punkten>)	$f(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x}$
	TrendExp2(<Liste von Punkten>)	$f(x) = c \cdot a^x$
Logarithmische Ausgleichsfunktion:	**TrendLog**(<Liste von Punkten>)	$f(x) = a + b \cdot \ln(x)$

Regressionsgerade händisch berechnen

Gegeben sind drei Punkte $A = (1 \mid 3)$, $B = (2 \mid 4)$ und $C = (6 \mid 5)$.

Gesucht ist die Regressionsgerade durch diese (kleine) Punktwolke.

Trage mithilfe von k und d die y-Koordinaten der folgenden Punkte ein, durch die die Gerade $y = k \cdot x + d$ verläuft:



$(1 \mid k + d)$ $\quad$ $(2 \mid 2 \cdot k + d)$ $\quad$ $(6 \mid 6 \cdot k + d)$

Stelle mithilfe von k und d eine Formel für die **Fehlerquadratsumme** auf:

$$\boldsymbol{F(k;d)} = (k + d - 3)^2 + (2 \cdot k + d - 4)^2 + (6 \cdot k + d - 5)^2 \qquad (\star)$$

Ausmultiplizieren und herausheben ergibt:

$$F(k;d) = 3 \cdot d^2 + (18 \cdot k - 24) \cdot d + (41 \cdot k^2 - 82 \cdot k + 50)$$

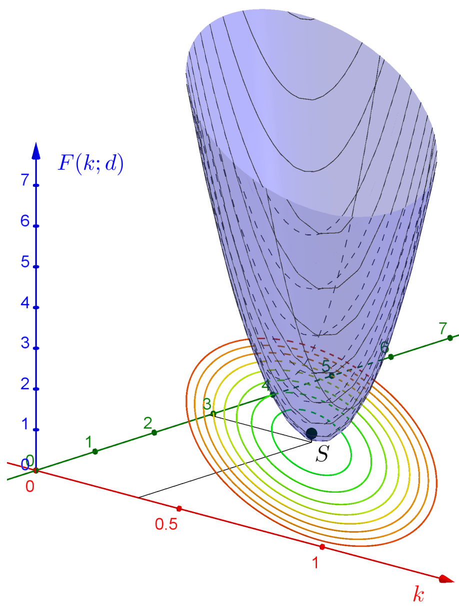
Für jede Zahl k ist $d \mapsto F(k;d)$ also eine quadratische Funktion.

Jede quadratische Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ hat ihren Scheitel an der Stelle $x = \frac{-b}{2 \cdot a}$.

Stelle mithilfe von k eine Formel für jene Stelle d auf, bei der die Fehlerquadratsumme minimal ist:

$$d = \frac{-(18 \cdot k - 24)}{2 \cdot 3} = -3 \cdot k + 4$$

Wir setzen in $(\star)$ ein:



$$F(k; -3 \cdot k + 4) = \cdots = 14 \cdot k^2 - 10 \cdot k + 2$$

Gesucht ist also jene Zahl k, für die

$$k \mapsto 14 \cdot k^2 - 10 \cdot k + 2$$

minimal ist.

Berechne diese Zahl k und die zugehörige Zahl d:

$$k = \frac{5}{14} = 0{,}357\ldots \qquad d = \frac{41}{14} = 2{,}928\ldots$$

Für die minimale Fehlerquadratsumme gilt also:

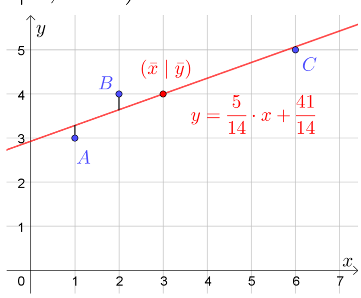
$$F\,(0{,}357\ldots; 2{,}928\ldots) = 0{,}214\ldots$$

Im Bild rechts oben siehst du den Graphen der Funktion in 2 Variablen $(k;d) \mapsto F(k;d)$.

Alle Punkte, die auf derselben Ellipse in der $(k;d)$-Ebene liegen, haben den selben Funktionswert.

Der Scheitelpunkt dieses elliptischen Paraboloids ist $S = (0{,}357\ldots \mid 2{,}928\ldots \mid 0{,}214\ldots)$.

Rechne nach, dass die Regressionsgerade durch den Schwerpunkt $(\bar{x} \mid \bar{y})$ der Punktwolke verläuft.



$$\bar{x} = 3,\ \bar{y} = 4 \implies k \cdot \bar{x} + d = \frac{5}{14} \cdot 3 + \frac{41}{14} = \frac{56}{14} = 4 = \bar{y}\ \checkmark$$