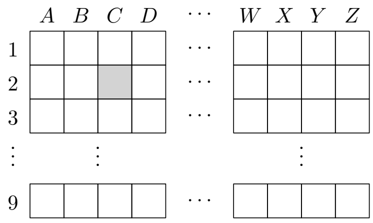
Multiplikationsregel

Wie viele verschiedene Paare (☺, $\star$) gibt es, bei denen …

i) ☺ ein Buchstabe aus dem Alphabet $\{A, B, C, \ldots, Z\}$ und

ii) $\star$ eine Ziffer aus $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ ist?



Ganz egal, welchen der 26 Buchstaben du für ☺ wählst,
du hast *gleich viele* mögliche Ziffern für $\star$, nämlich 9.

Rechts sind alle möglichen Paare in einem Raster veranschaulicht.
Jedem möglichen Paar entspricht genau ein Kästchen im Raster.
Zum Beispiel entspricht dem Paar $(C, 2)$ das rechts markierte Kästchen.

Für die Anzahl solcher Paare gilt also: $26 \cdot 9 = 234$

Passwörter

Auf einer Website besteht ein Passwort aus einer beliebigen Abfolge von Großbuchstaben $(A - Z)$, Kleinbuchstaben $(a - z)$ bzw. Ziffern $(0 - 9)$.

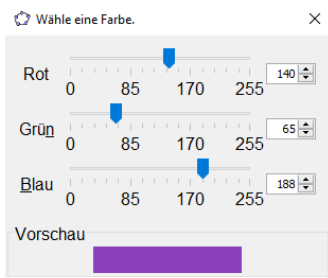
a) Wie viele solcher Passwörter mit genau 3 Zeichen gibt es?
$62 \cdot 62 \cdot 62 = 238\,328$

b) Wie viele solcher Passwörter mit genau 8 Zeichen gibt es?
$62^8 = 2{,}183... \cdot 10^{14}$

RGB-Farbsystem

Im *RGB-Farbsystem* wird jede Farbe als Kombination der Farben **R**ot, **G**rün und **B**lau dargestellt.

- Die Intensität der Farbe Rot ist eine ganze Zahl r mit $0 \leq r \leq 255$.
- Die Intensität der Farbe Grün ist eine ganze Zahl g mit $0 \leq g \leq 255$.
- Die Intensität der Farbe Blau ist eine ganze Zahl b mit $0 \leq b \leq 255$.



Zum Beispiel ergibt die Kombination $r = 140$, $g = 65$ und $b = 188$
die im Bild rechts dargestellte Farbe.

Wie viele verschiedene Farben gibt es im RGB-Farbsystem?
$256 \cdot 256 \cdot 256 = 16\,777\,216$ Farben

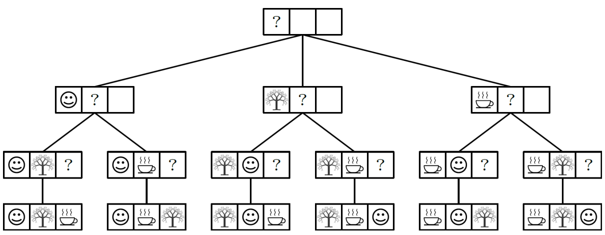
Permutationen ohne Wiederholung

Die 3 unterscheidbaren Objekte ☺, 🌳 und ☕ sollen in einer Reihe angeordnet werden.

i) Für die erste Position gibt es **3** Möglichkeiten.

ii) *Unabhängig* von der ersten Entscheidung gibt es für die zweite Position **2** Möglichkeiten.

iii) *Unabhängig* von den ersten beiden Entscheidungen gibt es für die dritte Position **1** Möglichkeit.



a) Wie viele Möglichkeiten gibt es also, um 3 unterscheidbare Objekte in einer Reihe anzuordnen?
$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es also, um 8 unterscheidbare Objekte in einer Reihe anzuordnen?
$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

Faktorielle

Es sollen n voneinander unterscheidbare Objekte in einer Reihe angeordnet werden.
Für die Anzahl möglicher Anordnungen schreiben wir kurz:

$$\boldsymbol{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \quad \text{mit } n \geq 1$$

Sprechweisen: „n *Faktorielle*“ / „n *Fakultät*“

Außerdem definieren wir $0! = 1$. Dann gilt der Zusammenhang $n! = n \cdot (n-1)!$ für alle $n \geq 1$.

Faktorielle

Trage ohne Taschenrechner die richtigen natürlichen Zahlen in die Kästchen ein.

a) $5! = 120$

b) $6! = 720$

c) $3! + 2! = 8$

d) $3! \cdot 2! = 12$

e) $\frac{42!}{41!} = 42$

f) $\frac{10!}{8!} = 90$

g) $87! = 87 \cdot 86!$

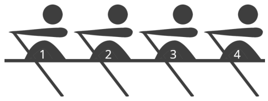
h) $7! = 42 \cdot 5!$

i) $\frac{23!}{23} = 22!$

j) $\frac{18!}{15!} = 18 \cdot 17 \cdot 16$

Vierer-Kajak

Aus einem Team von 7 Personen sollen 4 Personen für ein Vierer-Kajak ausgewählt werden.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Sitzreihenfolge im Kajak wesentlich ist?



$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

Top 10

Du sollst aus 50 Liedern eine Top-10-Reihung erstellen. Wie viele Möglichkeiten hast du dafür?
Trage die richtigen Zahlen in die Kästchen ein, und berechne mit dem Taschenrechner.

$\frac{50!}{40!} = 3{,}72\ldots \cdot 10^{16}$ Wie viele Stellen hat das Ergebnis? 17 Stellen

Codeknacken

Du hast den 4-stelligen Zifferncode für *dein* Fahrradschloss vergessen. Ziffern 0 – 9
Pro Sekunde kannst du 2 Zifferncodes ausprobieren.
Wie lange benötigst du höchstens, um das Zahlenschloss zu knacken, wenn …

1) … du keine weiteren Informationen hast?

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$ Zifferncodes $\implies \frac{10\,000\,\text{Z.}}{2\,\text{Z./s}} = 5000\,\text{s} = 83{,}3\ldots\,\text{min}$

2) … du noch weißt, dass die erste Ziffer 4 und die zweite Ziffer 2 ist?

$1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 = 100$ Zifferncodes $\implies \frac{100\,\text{Z.}}{2\,\text{Z./s}} = 50\,\text{s}$

3) … du noch weißt, dass die erste Ziffer und die letzte Ziffer gleich sind?

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 = 1000$ Zifferncodes $\implies \frac{1000\,\text{Z.}}{2\,\text{Z./s}} = 500\,\text{s}$

4) … du noch weißt, dass das Produkt der 4 Ziffern ungerade ist? Alle Ziffern sind ungerade.

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ Zifferncodes $\implies \frac{625\,\text{Z.}}{2\,\text{Z./s}} = 312{,}5\,\text{s}$

5) … du noch weißt, dass das Produkt der 4 Ziffern gerade ist? *Nicht* alle Ziffern sind ungerade.

$10^4 - 5^4 = 9375$ Zifferncodes $\implies \frac{9375\,\text{Z.}}{2\,\text{Z./s}} = 4687{,}5\,\text{s} = 78{,}1\ldots\,\text{min}$

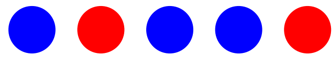
Permutationen mit Wiederholung

Wir ordnen 3 blaue und 2 rote Kugeln in einer Reihe an.
Wie viele verschiedene Farbmuster sind dabei möglich?

Zuerst nummerieren wir die Kugeln (gedanklich) von 1 bis 5 durch.

Für die 5 nummerierten Kugeln gibt es $5! = 120$ Anordnungen. 1 2 3 4 5

Jede Anordnung der nummerierten Kugeln hat ein bestimmtes Farbmuster.

Zum Beispiel: 1 2 3 4 5 $\Longrightarrow$ 

Allerdings ergeben *verschiedene* Anordnungen der nummerierten Kugeln jeweils *dasselbe* Farbmuster. Solche Anordnungen unterscheiden sich nur durch Umordnen gleichfarbiger Kugeln voneinander.

1	2	3	4	5
1	2	4	3	5
3	2	1	4	5
3	2	4	1	5
4	2	1	3	5
4	2	3	1	5

Wie viele Anordnungen der nummerierten Kugeln ergeben nun dasselbe Farbmuster?

Um die 3 blauen nummerierten Kugeln im selben Farbmuster anzuordnen, gibt es $3! = 6$ Möglichkeiten.

Unabhängig davon gibt es für die Anordnung der 2 roten nummerierten Kugeln im selben Farbmuster $2! = 2$ Möglichkeiten.

1	5	3	4	2
1	5	4	3	2
3	5	1	4	2
3	5	4	1	2
4	5	1	3	2
4	5	3	1	2

Für jedes mögliche Farbmuster – wie zum Beispiel ●●●●● – gibt es also genau $3! \cdot 2! = 12$ verschiedene Anordnungen der nummerierten Kugeln.
Damit können wir die Anzahl verschiedener Farbmuster berechnen:

$12 \times$ ●●●●●
$12 \times$ ●●●●●
$\vdots$
$12 \times$ ●●●●●

$\boxed{10}$ Farbmuster

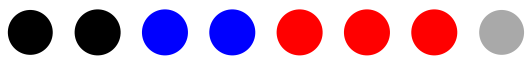
120 Anordnungen
der nummerierten Kugeln

$$\underbrace{12}_{\text{Anordnungen pro Farbmuster}} \cdot \overbrace{\boxed{10}}^{\text{Anzahl Farbmuster}} = \underbrace{120}_{\text{Anordnungen der nummerierten Kugeln}}$$

Allgemein gilt für die Anzahl möglicher Farbmuster mit b blauen und r roten Kugeln: $\dfrac{(b+r)!}{b! \cdot r!}$

Permutationen mit Wiederholung

Es sollen 2 schwarze, 2 blaue, 3 rote und eine graue Kugel in einer Reihe beliebig angeordnet werden.
Wie viele verschiedene Farbmuster sind dabei möglich?

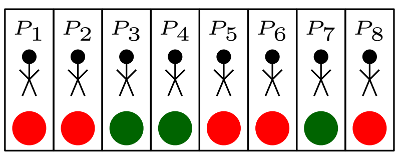


$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 1!} = 1680$$

Auswahlproblem

Sarah soll aus 8 Personen eine Gruppe von 3 Personen auswählen. Wie viele Möglichkeiten hat sie?
Sie stellt die 8 Personen in eine Reihe und verteilt 3 grüne Kugeln und 5 rote Kugeln.

Jedes Farbmuster entspricht genau einer Auswahl von 3 Personen.
Genau die Personen mit einer grünen Kugel wählt Sarah für die Gruppe aus.



Wie viele Möglichkeiten hat Sarah also?

$$\frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$$

Binomialkoeffizient

Wie viele Möglichkeiten gibt es, um aus n Personen eine Gruppe von k Personen auszuwählen?

Stelle mithilfe von n und k einen Term für diese Anzahl auf: $\dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Wir verwenden den sogenannten **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k}$ als Kurzschreibweise für diesen Term.

Mehr dazu findest du auf dem Arbeitsblatt – Binomialkoeffizienten. Sprechweise: „n *über* k“

Alles der Reihe nach

Wie viele Möglichkeiten gibt es, um aus 8 Personen eine Gruppe von 3 Personen auszuwählen?
Lukas meint, eine andere Lösung gefunden zu haben:

„*Zuerst wähle ich eine der* 8 *Personen aus. Von den verbleibenden* 7 *Personen wähle ich eine zweite Person. Und zum Schluss wähle ich noch eine der verbleibenden* 6 *Personen. Also gibt es* $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ *Möglichkeiten, um aus* 8 *Personen eine Gruppe von* 3 *Personen auszuwählen.*“

Warum liefert sein Rechenweg ein *falsches* Ergebnis? Kannst du seinen Lösungsweg korrigieren?

Lukas zählt jede Gruppe von 3 Personen mehrfach, weil die Reihenfolge der Auswahl keine Rolle spielt.
Zum Beispiel liefern $A \to B \to C$ und $A \to C \to B$ die gleiche Gruppe $\{A, B, C\}$.
Lukas zählt jede Gruppe genau $3! = 6$ Mal. Für die richtige Anzahl gilt also:

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$$

1	2	3
A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

Reihenfolge wichtig?

Aus 15 verschiedenen Aufgaben soll eine Schularbeit mit 9 verschiedenen Aufgaben erstellt werden.
Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es zur Erstellung, wenn …

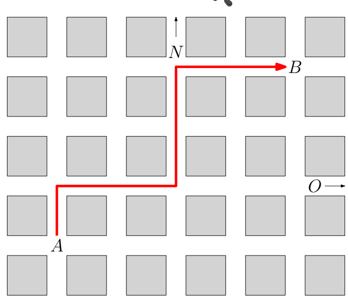
1) … die Reihenfolge der ausgewählten Aufgaben wichtig ist?

$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 7 = \frac{15!}{6!} = 1\,816\,214\,400$ Möglichkeiten

2) … die Reihenfolge der ausgewählten Aufgaben *nicht* wichtig ist?

$\frac{15!}{9! \cdot 6!} = \binom{15}{9} = 5005$ Möglichkeiten

Manhattan



Du stehst in Manhattan an der dargestellten Kreuzung A.
Wie viele Wege zur Kreuzung B gibt es, die so kurz wie möglich sind?

Ein solcher Weg ist rechts eingezeichnet.

Bei jeder Kreuzung musst du also entscheiden, ob du um einen Straßenblock Richtung Norden (N) oder Richtung Osten (O) gehst.
Jeder solche Weg geht entlang von 7 Straßenblöcken.

1) Begründe, warum es *nicht* $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^7$ solcher Wege gibt.

Tatsächlich hat man *nicht* bei jeder Kreuzung die Wahlmöglichkeit zwischen N und O.
Zum Beispiel führt der Weg $N \to N \to N \to N \to N \to N \to N$ *nicht* von A nach B.
Wenn der Weg mit $N \to N \to N$ beginnt, dann gibt es nur mehr einen Weg nach B, nämlich $N \to N \to N \to O \to O \to O \to O$.

2) Berechne die richtige Anzahl. Hinweis: Den eingezeichneten Weg kannst du mit (N, O, O, N, N, O, O) codieren.

$$\frac{7!}{3! \cdot 4!} = \binom{7}{3} = 35$$

Jeder kürzeste Weg geht entlang von 7 Straßenblöcken und besteht aus $3 \times N$ und $4 \times O$.

6 aus 45

Beim Glücksspiel „Lotto 6 aus 45“ gibt es 45 Kugeln, die mit den Zahlen von 1 bis 45 nummeriert sind.

Mit einem Lotto-Tipp entscheidet man sich für 6 von diesen 45 Zahlen.
Beim Lotto-Tipp rechts wurden zum Beispiel $\{3, 6, 19, 23, 26, 42\}$ ausgewählt.

1	2	**3**	4	5	**6**
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	**23**	24
25	**26**	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	**42**
43	44	45			

Bei einer Lotto-Ziehung werden 6 der 45 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und aufsteigend sortiert. Die Reihenfolge, in der die 6 Zahlen getippt werden, ist also egal.

1) Wie viele verschiedene Lotto-Tipps sind möglich?

$$\frac{45!}{6! \cdot 39!} = \binom{45}{6} = 8\,145\,060$$

Wenn die 6 Zahlen auf den gezogenen Kugeln genau die 6 Zahlen von deinem Lotto-Tipp sind, spricht man von einem „Lotto-Sechser“ und du gewinnst den Hauptpreis. Jeder Lotto-Tipp kostet 1,30 €.

2) Wie viel Geld benötigst du, wenn du bei der nächsten Ziehung *sicher* einen Lotto-Sechser willst?

$8\,145\,060 \cdot 1{,}3 = 10\,588\,578$ €

Additionsregel

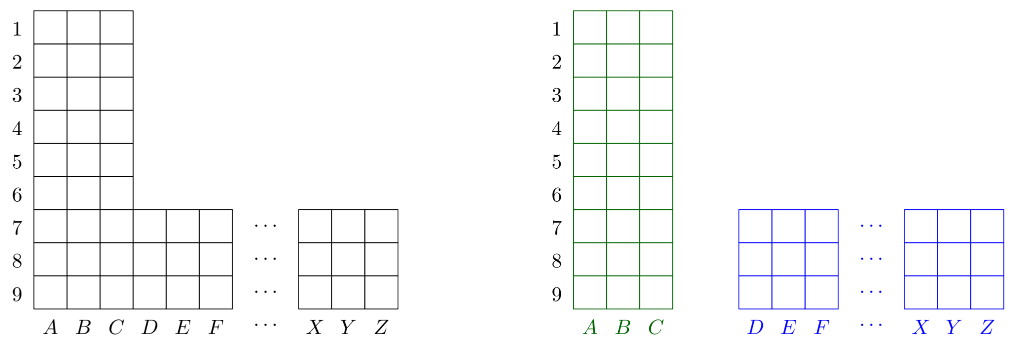
Wie viele verschiedene Paare $(☺, \star)$ gibt es, bei denen ...

i) ☺ ein Buchstabe aus dem Alphabet $\{A, B, C, \ldots, Z\}$ ist,

ii) $\star$ eine Ziffer aus $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ ist, aber

iii) die Ziffern von 1 bis 6 nur in Kombination mit den Buchstaben A, B und C erlaubt sind.

Wegen **iii)** gibt es je nach Wahl des Buchstabens also *verschieden* viele Möglichkeiten für die Ziffer.
Um jedes mögliche Paar *genau einmal* zu zählen, führen wir eine Fallunterscheidung durch:
Entweder der Buchstabe ist aus $\{A, B, C\}$ oder der Buchstabe ist aus $\{D, E, F, \ldots, Z\}$.



Für die Anzahl solcher Paare gilt also: $3 \cdot 9 + 23 \cdot 3 = 96$

Additionsregel

Wie viele 6-stellige natürliche Zahlen gibt es, die größer als 420 000 sind und genau aus den Ziffern 1, 1, 2, 2, 3, 4 bestehen?

Die erste Ziffer muss 4 sein. Die zweite Ziffer kann entweder 2 oder 3 sein.

i) Wenn die zweite Ziffer 2 ist, bleiben 1, 1, 2, 3 in beliebiger Reihenfolge.

ii) Wenn die zweite Ziffer 3 ist, bleiben 1, 1, 2, 2 in beliebiger Reihenfolge.

Für die gesuchte Anzahl gilt also: $\underbrace{\frac{4!}{2!}}_{\text{i)}} + \underbrace{\frac{4!}{2! \cdot 2!}}_{\text{ii)}} = 12 + 6 = 18$

Dieses Werk des Projekts MmF unterliegt einer CC BY-NC-ND 4.0 Lizenz.
https://mmf.univie.ac.at