

Teilbarkeit ganzer Zahlen



$a$  und  $b$  sind ganze Zahlen, wobei  $a$  nicht 0 ist. Kurz:  $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$

- Gibt es eine ganze Zahl  $k$  mit  $b = a \cdot k$ , dann nennen wir  $a$  einen **Teiler** von  $b$ .  
Bei der ganzzahligen Division  $b : a = k$  bleibt also *kein* Rest. Wir schreiben dafür kurz:  $a \mid b$
- Gibt es *keine* solche ganze Zahl  $k$ , dann schreiben wir  $a \nmid b$ .

Teilbarkeit ganzer Zahlen

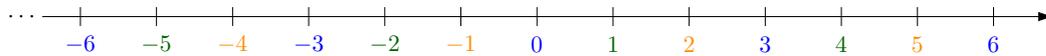


Entscheide jeweils, ob  $\mid$  oder  $\nmid$  stimmt: a)  $4 \mid -24$    b)  $-5 \mid 20$    c)  $6 \nmid -3$    d)  $-3 \mid -15$    e)  $2 \mid 0$

Vielfache & Restklassen



Die **Vielfachen** einer ganzen Zahl  $m$  sind alle Zahlen der Form  $m \cdot k$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ .  
Zum Beispiel: Die ganze Zahl 3 hat die Vielfachen  $\{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$ .



Dividieren wir eine natürliche Zahl ganzzahlig durch 3, bleibt entweder 0 Rest oder 1 Rest oder 2 Rest.

- Die Zahlenmenge  $\bar{0} = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$  ist die **Restklasse 0 modulo 3**.  
Jede Zahl in der Restklasse 0 können wir in der Form  $3 \cdot k + 0$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  schreiben.
- Die Zahlenmenge  $\bar{1} = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$  ist die **Restklasse 1 modulo 3**.  
Jede Zahl in der Restklasse 1 können wir in der Form  $3 \cdot k + 1$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  schreiben.
- Die Zahlenmenge  $\bar{2} = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$  ist die **Restklasse 2 modulo 3**.  
Jede Zahl in der Restklasse 2 können wir in der Form  $3 \cdot k + 2$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  schreiben.

Kongruenz

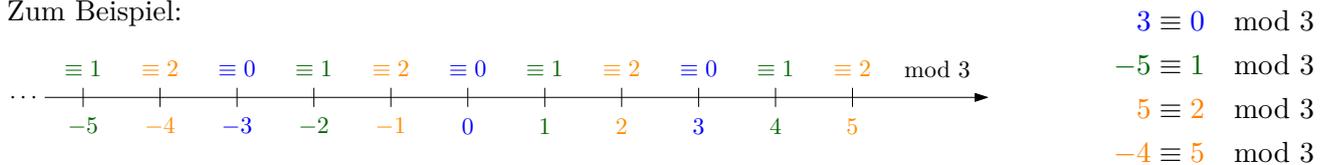


Wenn zwei Zahlen  $a$  und  $b$  in der gleichen Restklasse modulo  $m$  liegen, dann ...

... sagen wir: „ $a$  und  $b$  sind **kongruent** modulo  $m$ “ bzw. „ $a$  ist **kongruent** zu  $b$  modulo  $m$ “

... schreiben wir:  $a \equiv b \pmod{m}$       Der Ausdruck  $a \equiv b \pmod{m}$  ist keine Gleichung, sondern eine **Kongruenz**.

Zum Beispiel:

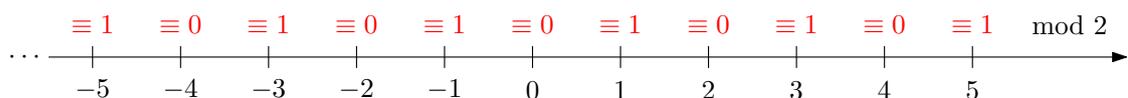


Kongruenz

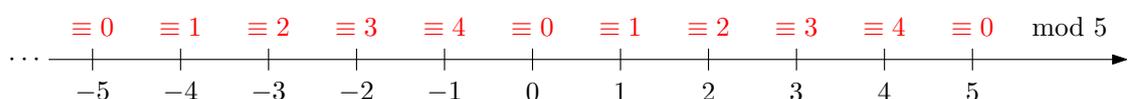


Trage in die Kästchen jene Zahl aus  $R = \{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$  ein, zu der die Zahl modulo  $m$  kongruent ist.

a)  $m = 2, R = \{0, 1\}$



b)  $m = 5, R = \{0, 1, 2, 3, 4\}$



Entscheide, ob die Zahlen kongruent ( $\equiv$ ) oder nicht kongruent ( $\not\equiv$ ) sind.

- a)  $27 \equiv 42 \pmod{5}$    b)  $-3 \equiv 39 \pmod{7}$    c)  $981273 \not\equiv 48276 \pmod{2}$    d)  $846 \equiv 14322 \pmod{3}$

Äquivalente Aussagen 

Zwei Zahlen  $a$  und  $b$  liegen genau dann in der gleichen Restklasse modulo  $m$ , wenn  $a = b + k \cdot m$  mit einer passenden ganzen Zahl  $k$  gilt.  $a$  und  $b$  unterscheiden sich um ein Vielfaches von  $m$ . Erkläre damit die folgende Aussage:

$$a \equiv b \pmod{m} \iff m \mid a - b$$

$a$  und  $b$  liegen genau dann in der gleichen Restklasse modulo  $m$ , wenn  $m$  ein Teiler von  $a - b$  ist.

$$a \equiv b \pmod{m} \iff a = b + k \cdot m \iff a - b = k \cdot m \iff m \mid a - b$$

Rechenregeln für Kongruenzen 

Erkläre die folgenden Rechenregeln für Kongruenzen:

- 1) Wir dürfen Kongruenzen modulo  $m$  addieren:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 \equiv b_1 \pmod{m} \\ a_2 \equiv b_2 \pmod{m} \end{array} \right\} \implies a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{m}$$

- 2) Wir dürfen beide Seiten einer Kongruenz mit der gleichen ganzen Zahl multiplizieren:

$$a \equiv b \pmod{m} \implies a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{m}$$

- 3) Wir dürfen Kongruenzen modulo  $m$  multiplizieren:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 \equiv b_1 \pmod{m} \\ a_2 \equiv b_2 \pmod{m} \end{array} \right\} \implies a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \pmod{m}$$

$$1) \left. \begin{array}{l} a_1 - b_1 = k_1 \cdot m \\ a_2 - b_2 = k_2 \cdot m \end{array} \right\} \implies (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) = \underbrace{(k_1 + k_2)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot m \implies a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{m} \checkmark$$

$$2) m \mid a - b \implies m \mid \underbrace{(a - b) \cdot c}_{a \cdot c - b \cdot c} \checkmark$$

$$3) \left. \begin{array}{l} a_1 \equiv b_1 \pmod{m} \implies a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot a_2 \pmod{m} \\ a_2 \equiv b_2 \pmod{m} \implies b_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \pmod{m} \end{array} \right\} \implies a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \pmod{m}$$

Division  

Wir dürfen beide Seiten einer Kongruenz *nicht* einfach durch einen gemeinsamen Teiler dividieren.

Zum Beispiel gilt  $\underbrace{18}_{=3 \cdot 6} \equiv \underbrace{30}_{=5 \cdot 6} \pmod{4}$ , aber  $3 \not\equiv 5 \pmod{4}$ .

Die richtige Rechenregel zum Kürzen gemeinsamer Teiler ist am Ende des Arbeitsblatts.



Gegeben sind zwei ganze Zahlen  $z$  und  $m$ , zum Beispiel  $z = 208$  und  $m = 12$ .

Gesucht ist jene Zahl  $r$  aus  $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ , für die  $z \equiv r \pmod{m}$  gilt.

- 1) Wir führen die Division mit Rest  $z : m$  durch:

$$208 : 12 = 17 + \frac{4}{12}$$

„Wie oft geht 12 in 208? 17 Mal, 4 Rest“

- 2) Wir multiplizieren die Gleichung mit  $m$ :

$$208 = 17 \cdot 12 + 4$$

- 3) Aus den Rechenregeln für Kongruenzen folgt, dass der Rest  $r = 4$  die gesuchte Zahl ist:

$$208 = \underbrace{17 \cdot 12}_{\equiv 0 \pmod{12}} + 4 \implies 208 \equiv 4 \pmod{12}$$



Ermittle jene Zahl  $r$  aus  $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ , für die  $z \equiv r \pmod{m}$  gilt.

a)  $42 = 5 \cdot 8 + 2 \implies 42 \equiv 2 \pmod{8}$

c)  $129 = 64 \cdot 2 + 1 \implies 129 \equiv 1 \pmod{2}$

b)  $96 = 13 \cdot 7 + 5 \implies 96 \equiv 5 \pmod{7}$

d)  $358 = 59 \cdot 6 + 4 \implies 358 \equiv 4 \pmod{6}$



- a) „Jede natürliche Zahl ist modulo 10 in der gleichen Restklasse wie ihre Einerziffer.“

Wir erklären die Aussage anhand der Zahl  $4723 = 4 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1$ :

$$4723 = \underbrace{4 \cdot 100 \cdot 10}_{\equiv 0 \pmod{10}} + \underbrace{7 \cdot 10 \cdot 10}_{\equiv 0 \pmod{10}} + \underbrace{2 \cdot 10}_{\equiv 0 \pmod{10}} + \underbrace{3 \cdot 1}_{\equiv 3 \pmod{10}} \equiv 3 \pmod{10}$$

Eine natürliche Zahl ist also genau dann durch 10 teilbar, wenn ihre Einerziffer 0 ist.

- b) „Jede natürliche Zahl ist modulo 5 in der gleichen Restklasse wie ihre Einerziffer.“

Erkläre die Aussage anhand der Zahl 4723:

$$4723 = \underbrace{4 \cdot 200 \cdot 5}_{\equiv 0 \pmod{5}} + \underbrace{7 \cdot 20 \cdot 5}_{\equiv 0 \pmod{5}} + \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 5}_{\equiv 0 \pmod{5}} + \underbrace{3 \cdot 1}_{\equiv 3 \pmod{5}} \equiv 3 \pmod{5}$$

Eine natürliche Zahl ist also genau dann durch 5 teilbar, wenn ihre Einerziffer 0 oder 5 ist.

- c) „Jede natürliche Zahl ist modulo 2 in der gleichen Restklasse wie ihre Einerziffer.“

Erkläre die Aussage anhand der Zahl 4723:

$$4723 = \underbrace{4 \cdot 500 \cdot 2}_{\equiv 0 \pmod{2}} + \underbrace{7 \cdot 50 \cdot 2}_{\equiv 0 \pmod{2}} + \underbrace{2 \cdot 5 \cdot 2}_{\equiv 0 \pmod{2}} + \underbrace{3 \cdot 1}_{\equiv 3 \pmod{2}}$$

Eine natürliche Zahl ist also genau dann durch 2 teilbar, wenn ihre Einerziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 ist.

a) „Jede natürliche Zahl ist modulo 9 in der gleichen Restklasse wie ihre Ziffernsumme.“

Wir erklären die Aussage anhand der Zahl  $4723 = 4 \cdot (999 + 1) + 7 \cdot (99 + 1) + 2 \cdot (9 + 1) + 3 \cdot 1$ :

$$4723 = \underbrace{4 \cdot 9 \cdot 111}_{\equiv 0 \pmod 9} + \underbrace{4}_{\equiv 4 \pmod 9} + \underbrace{7 \cdot 9 \cdot 11}_{\equiv 0 \pmod 9} + \underbrace{7}_{\equiv 7 \pmod 9} + \underbrace{2 \cdot 9 \cdot 1}_{\equiv 0 \pmod 9} + \underbrace{2 + 3 \cdot 1}_{\equiv 5 \pmod 9} \equiv 4 + 7 + 2 + 3 \pmod 9$$

Eine natürliche Zahl ist also genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme es ist.

b) „Jede natürliche Zahl ist modulo 3 in der gleichen Restklasse wie ihre Ziffernsumme.“

Erkläre die Aussage anhand der Zahl 4723:

$$4723 = \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 333}_{\equiv 0 \pmod 3} + \underbrace{4}_{\equiv 1 \pmod 3} + \underbrace{7 \cdot 3 \cdot 33}_{\equiv 0 \pmod 3} + \underbrace{7}_{\equiv 1 \pmod 3} + \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 3}_{\equiv 0 \pmod 3} + \underbrace{2 + 3}_{\equiv 2 \pmod 3} \equiv 4 + 7 + 2 + 3 \pmod 3$$

Eine natürliche Zahl ist also genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme es ist.

1) Fülle in den beiden Tabellen die Reste bei Division durch 4 aus.

Rest von $(\square + \square) : 4$				
+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Rest von $(\square \cdot \square) : 4$				
·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

2) Ermittle jene Zahl  $r$  aus  $\{0, 1, 2, 3\}$ , für die  $23 \equiv r \pmod 4$  gilt.

$$23 = 5 \cdot 4 + 3 \implies 23 \equiv 3 \pmod 4$$

Ermittle jene Zahl  $r$  aus  $\{0, 1, 2, 3\}$ , für die  $42 \equiv r \pmod 4$  gilt.

$$42 = 10 \cdot 4 + 2 \implies 42 \equiv 2 \pmod 4$$

3) Berechne  $23 + 42 \pmod 4$  und  $23 \cdot 42 \pmod 4$ .

$$23 + 42 \equiv 3 + 2 \equiv 1 \pmod 4$$

$$23 \cdot 42 \equiv 3 \cdot 2 \equiv 2 \pmod 4$$

4) Wie viele Lösungen hat die Kongruenz  $2 \cdot x \equiv 2 \pmod 4$  über der Grundmenge  $\{0, 1, 2, 3\}$ ?

2 Lösungen:  $x = 1$  und  $x = 3$

5) Wie viele Lösungen hat die Kongruenz  $2 \cdot x \equiv 1 \pmod 4$  über der Grundmenge  $\{0, 1, 2, 3\}$ ?

Keine Lösung.



1) Fülle in den beiden Tabellen die Reste bei Division durch 5 aus.

Rest von $(\square + \square) : 5$					
+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Rest von $(\square \cdot \square) : 5$					
·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

2) Was fällt dir in der Tabelle zum Multiplizieren auf?

Ab der zweiten Zeile enthält jede Zeile alle Zahlen aus  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  genau einmal.

3)  $a$  und  $b$  sind jeweils Zahlen aus  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

Wie viele Lösungen hat die Kongruenz  $a \cdot x \equiv b \pmod{5}$  über der Grundmenge  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ?

Genau eine Lösung.



1) Fülle in den beiden Tabellen die Reste bei Division durch 6 aus.

Rest von $(\square + \square) : 6$						
+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Rest von $(\square \cdot \square) : 6$						
·	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

2) Welche Zeilen in der Multiplikations-Tabelle enthalten alle Zahlen aus  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  genau einmal?  
 Es gibt einen Zusammenhang mit dem Divisor 6. Hast du eine Vermutung?

Die Zeile  $1 \cdot x$  und die Zeile  $5 \cdot x$ .

1 und 5 sind genau die Zahlen aus  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , die zu 6 teilerfremd sind.

Wir dürfen beide Seiten einer Kongruenz modulo  $m$  durch einen gemeinsamen Teiler  $c$  dividieren. Bei der neuen Kongruenz müssen wir aber modulo  $\frac{m}{\text{ggT}(c,m)}$  rechnen:

$$a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod m \stackrel{(*)}{\iff} a \equiv b \pmod{\frac{m}{\text{ggT}(c,m)}}$$

Zum Beispiel:  $\underbrace{18}_{=3 \cdot 6} \equiv \underbrace{30}_{=5 \cdot 6} \pmod 4 \iff 3 \equiv 5 \pmod 2$ , weil  $\text{ggT}(6, 4) = 2$ .

Am [Arbeitsblatt – Fundamentalsatz der Arithmetik](#) haben wir  $m \mid c \cdot N \iff \frac{m}{\text{ggT}(c,m)} \mid N$  gezeigt. Damit können wir  $(*)$  begründen:

$$\begin{aligned} a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod m &\iff \underbrace{a \cdot c - b \cdot c}_{c \cdot (a-b)} \equiv 0 \pmod m \iff \\ &\iff m \mid c \cdot (a-b) \iff \\ &\iff \frac{m}{\text{ggT}(c,m)} \mid a-b \iff \\ &\iff a-b \equiv 0 \pmod{\frac{m}{\text{ggT}(c,m)}} \iff \\ &\iff a \equiv b \pmod{\frac{m}{\text{ggT}(c,m)}} \end{aligned}$$

1) Fülle in den beiden Tabellen die Reste bei Division durch 7 aus.

Rest von ( <input type="text"/> + <input type="text"/> ): 7							
+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Rest von ( <input type="text"/> · <input type="text"/> ): 7							
·	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

2)  $c$  ist eine Zahl aus  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Die Spalte  $x \cdot c \pmod 7$  enthält jede der Zahlen  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  genau einmal. Begründe, warum das aus der Kürzungsregel für Kongruenzen folgt.

7 ist eine Primzahl, also gilt  $\text{ggT}(c, 7) = 1$ .

Aus  $a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod 7$  folgt mit der Kürzungsregel  $a \equiv b \pmod 7$ .

Die Zahlen  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  sind in verschiedenen Restklassen modulo 7.

Also müssen  $0 \cdot c, 1 \cdot c, 2 \cdot c, \dots, 6 \cdot c$  in verschiedenen Restklassen modulo 7 sein.

