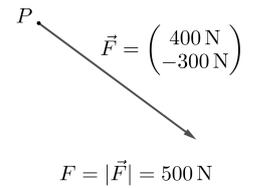


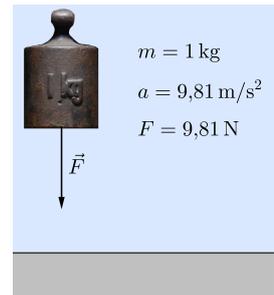
Kraftvektoren 

Bei Kräften ist nicht nur ihre *Größe* wichtig, sondern auch ihre *Richtung*.
 Rechts ist eine Kraft durch einen Pfeil dargestellt.
 Wir sprechen deshalb auch von einem **Kraftvektor** \vec{F} .
 Die Länge des Pfeils ist der Betrag (die Größe) der Kraft.
 Für den Betrag einer Kraft schreiben wir statt $|\vec{F}|$ auch kürzer F .
 Für die Wirkung einer Kraft auf einen Körper ist auch der Angriffspunkt P der Kraft wichtig.
 Wir können Kraftvektoren daher – im Gegensatz zu geometrischen **Vektoren** – *nicht* frei verschieben.



Newton 

Die Größe einer Kraft messen wir in der Einheit Newton (N).
 Mit einer Kraft mit dem Betrag $F = 1\text{ N}$ können wir einem Körper mit der Masse $m = 1\text{ kg}$ die Beschleunigung $a = 1\text{ m/s}^2$ erteilen.
 Mit 1 Newton können wir diesen Körper also aus dem Ruhezustand innerhalb einer Sekunde auf die Geschwindigkeit 1 m/s beschleunigen.
 Wenn allgemein ein Körper mit der Masse m entlang einer geradlinigen Bahn beschleunigt wird, so wirkt auf ihn eine Kraft \vec{F} in Wegrichtung.
 Die Beschleunigung a kann positiv (Körper wird schneller) oder negativ (Körper wird langsamer) sein, je nachdem, ob der Kraftpfeil in Bewegungsrichtung oder gegen die Bewegungsrichtung orientiert ist.
 Für den Betrag der Kraft gilt $F = m \cdot |a|$ und für die Einheit $1\text{ N} = 1\text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$.



Diese Aussage ist eine vereinfachte Formulierung des **Zweiten Newtonschen Gesetzes** – eine Grundlage der klassischen Mechanik.
[Isaac Newton](#) konnte damit die Bewegung der Planeten mathematisch beschreiben.

Erdbeschleunigung 

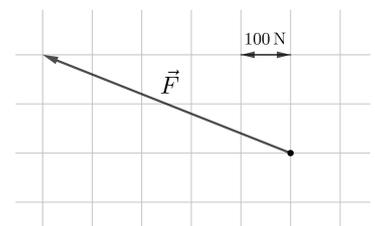
Julian springt im Schwimmbad von einem Sprungturm.
 Seine Masse beträgt $m = 63\text{ kg}$.
 Im freien Fall beschleunigt er mit $a \approx 9,81\text{ m/s}^2$ senkrecht nach unten.
 Die zugehörige Kraft, die senkrecht nach unten wirkt, heißt **Gewichtskraft**.
 Berechne den Betrag der Gewichtskraft, die im freien Fall auf Julian wirkt.



$$F = m \cdot a \approx 618\text{ N}$$

Kraftvektor 

Rechts ist ein Kraftvektor \vec{F} dargestellt.
 Ermittle die Komponenten von \vec{F} und seinen Betrag F .
 $\vec{F} = \begin{pmatrix} -500 \\ 200 \end{pmatrix} \text{ N}$ $F = \sqrt{500^2 + 200^2} = 538,5... \text{ N}$

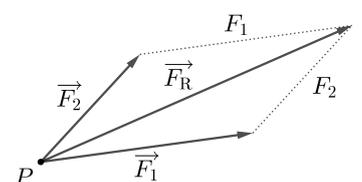


Resultierende Kraft 

Wirken in einem Punkt P zwei Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 , dann haben sie die gleiche Wirkung wie die **resultierende Kraft** \vec{F}_R mit:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad \text{„Superpositionsprinzip“}$$

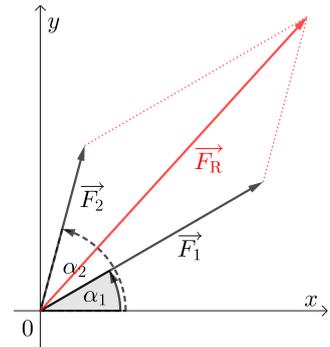
Diese **Vektoraddition** stellen wir in einem **Kräfteparallelogramm** dar.



Für die beiden rechts dargestellten Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 gilt:

$$|\vec{F}_1| = 800 \text{ N}, \alpha_1 = 30^\circ \quad |\vec{F}_2| = 520 \text{ N}, \alpha_2 = 75^\circ$$

- 1) Berechne die Komponenten von \vec{F}_1 und \vec{F}_2 .
Hinweis: Verwende die [Winkelfunktionen in rechtwinkligen Dreiecken](#).
- 2) Veranschauliche rechts die resultierende Kraft $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.
- 3) Berechne die resultierende Kraft \vec{F}_R und ihren Betrag F_R .
- 4) Berechne den Winkel α , den \vec{F}_R mit der positiven x -Achse einschließt.



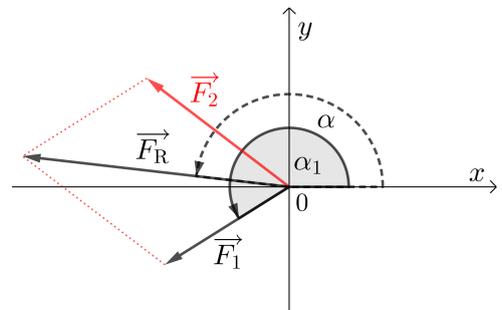
- 1) $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 800 \cdot \cos(30^\circ) \\ 800 \cdot \sin(30^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 692,8\dots \\ 400 \end{pmatrix} \text{ N} \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 520 \cdot \cos(75^\circ) \\ 520 \cdot \sin(75^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 134,5\dots \\ 502,2\dots \end{pmatrix} \text{ N}$
- 3) $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 827,4\dots \\ 902,2\dots \end{pmatrix} \text{ N} \quad F_R = \sqrt{827,4\dots^2 + 902,2\dots^2} = 1224,2\dots \text{ N}$
- 4) $\tan(\alpha) = \frac{902,2\dots}{827,4\dots} \implies \alpha = 47,4\dots^\circ$

Für die beiden rechts dargestellten Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_R gilt:

$$|\vec{F}_1| = 250 \text{ N}, \alpha_1 = 210^\circ \quad |\vec{F}_R| = 450 \text{ N}, \alpha = 170^\circ$$

Dabei ist \vec{F}_R die resultierende Kraft von \vec{F}_1 und einer weiteren Kraft \vec{F}_2 , die auch im Koordinatenursprung angreift.

- 1) Berechne die Komponenten von \vec{F}_1 und \vec{F}_R .
Hinweis: Verwende die [Winkelfunktionen am Einheitskreis](#).
- 2) Veranschauliche rechts den Kraftvektor \vec{F}_2 als Pfeil ausgehend vom Koordinatenursprung.
- 3) Berechne den Kraftvektor \vec{F}_2 und seinen Betrag F_2 .
- 4) Berechne den Winkel α_2 , den \vec{F}_2 mit der positiven x -Achse einschließt.



- 1) $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 250 \cdot \cos(210^\circ) \\ 250 \cdot \sin(210^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -216,5\dots \\ -125 \end{pmatrix} \text{ N} \quad \vec{F}_R = \begin{pmatrix} 450 \cdot \cos(170^\circ) \\ 450 \cdot \sin(170^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -443,1\dots \\ 78,14\dots \end{pmatrix} \text{ N}$
- 3) $\vec{F}_2 = \vec{F}_R - \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -226,6\dots \\ 203,1\dots \end{pmatrix} \text{ N} \quad F_2 = \sqrt{226,6\dots^2 + 203,1\dots^2} = 304,3\dots \text{ N}$
- 4) $\alpha_2 = 180^\circ - \arctan\left(\frac{203,1\dots}{226,6\dots}\right) = 138,1\dots^\circ$

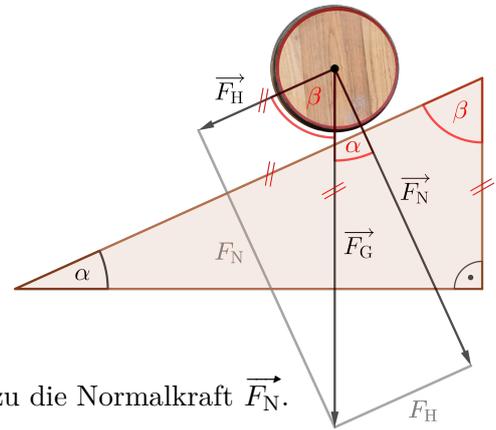
Ein Fass mit der Masse $m = 50 \text{ kg}$ rollt die rechts dargestellte Rampe mit dem Steigungswinkel $\alpha = 25^\circ$ hinunter.

- 1) Berechne den Betrag der Gewichtskraft \vec{F}_G , die dabei auf das Fass wirkt (Erdbeschleunigung $a \approx 9,81 \text{ m/s}^2$).

$$F_G = m \cdot a = 490,5 \text{ N}$$

Die Gewichtskraft \vec{F}_G kann – wie rechts dargestellt – in zwei Kräfte zerlegt werden: $\vec{F}_G = \vec{F}_H + \vec{F}_N$

Dabei ist \vec{F}_H die Hangabtriebskraft und im rechten Winkel dazu die Normalkraft \vec{F}_N .



- 2) Die Kraftvektoren \vec{F}_G und \vec{F}_N schließen den Winkel α ein. Warum?

Die beiden eingezeichneten Winkel β sind als Parallelwinkel gleich groß.

Aus der Winkelsumme 180° im Dreieck (Rampenquerschnitt) folgt, dass $\alpha + \beta = 90^\circ$ gilt.

Also schließen die Kraftvektoren \vec{F}_G und \vec{F}_N den Winkel α ein.

- 3) Berechne den Betrag F_H der Hangabtriebskraft und den Betrag F_N der Normalkraft.

$$\sin(\alpha) = \frac{F_H}{F_G} \implies F_H = F_G \cdot \sin(\alpha) = 207,2... \text{ N}$$

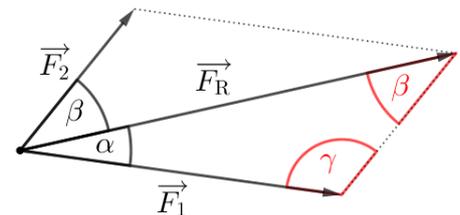
$$\cos(\alpha) = \frac{F_N}{F_G} \implies F_N = F_G \cdot \cos(\alpha) = 444,5... \text{ N}$$

Im rechts dargestellten Kräfteparallelogramm gilt:

$$|\vec{F}_1| = 42 \text{ N}, \alpha = 20^\circ, \beta = 38^\circ$$

Berechne den Betrag der resultierenden Kraft \vec{F}_R .

Hinweis: Verwende die [Winkelfunktionen im allgemeinen Dreieck](#).



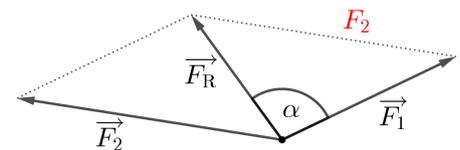
$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 122^\circ$$

$$\frac{F_R}{\sin(\gamma)} = \frac{F_1}{\sin(\beta)} \implies F_R = \frac{F_1 \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\beta)} = 57,85... \text{ N} \quad (\text{Sinussatz})$$

Im rechts dargestellten Kräfteparallelogramm gilt:

$$|\vec{F}_1| = 380 \text{ N}, \alpha = 100^\circ, |\vec{F}_R| = 300 \text{ N}$$

Berechne den Betrag der Kraft \vec{F}_2 .



$$F_2 = \sqrt{F_1^2 + F_R^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_R \cdot \cos(\alpha)} = 523,4... \text{ N} \quad (\text{Cosinussatz})$$

Arbeit – Kraft in Wegrichtung



Wenn ein Körper entlang eines geradlinigen Wegs der Länge s bewegt wird und dabei auf den Körper stets eine Kraft \vec{F} wirkt, so wird Arbeit verrichtet.

Wenn \vec{F} konstant ist und in Bewegungsrichtung zeigt, dann ist

$$W = F \cdot s$$

die dabei verrichtete **Arbeit W** (engl. Work).

Für die Einheit der Arbeit gilt: $1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ J}$ (1 Joule)

James Prescott Joule



Hubarbeit



Du hebst einen vollen Wasserkübel mit der Masse $m = 12 \text{ kg}$ auf einen 80 cm hohen Tisch senkrecht nach oben. Berechne die dabei verrichtete Arbeit in Joule.

Hinweis: Du kannst für die gesamte Bewegung mit der Erdbeschleunigung $a \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ rechnen.

Damit der Wasserkübel in Bewegung kommt, ist zu Beginn zwar kurz eine größere Beschleunigung notwendig.

Dafür ist aber beim Abstellen ausgleichend eine kleinere Beschleunigung notwendig.

$$F = m \cdot a = 12 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 117,72 \text{ N}$$

$$W = F \cdot s = 117,72 \text{ N} \cdot 0,8 \text{ m} = 94,176 \text{ J}$$

Arbeit – Skalarprodukt



Wenn ein Körper entlang eines Vektors \vec{s} bewegt wird und dabei auf den Körper stets eine Kraft \vec{F} wirkt, so wird Arbeit verrichtet.

Wenn \vec{F} konstant ist, dann ist das **Skalarprodukt**

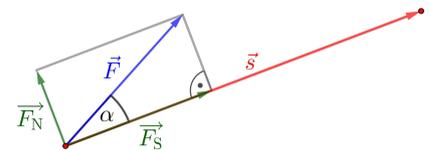
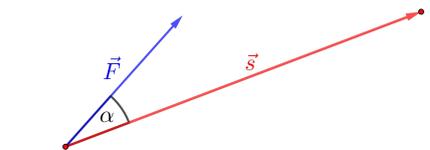
$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

die dabei verrichtete **Arbeit W** . Wir begründen diese Formel:

Zerlegt man die Kraft \vec{F} in die Kräfte \vec{F}_S (in Bewegungsrichtung) und \vec{F}_N (normal zur Bewegungsrichtung), dann folgt aus der

Vektor-Winkel-Formel:

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\alpha) = \underbrace{|\vec{F}_S|}_{\text{Kraft in Wegrichtung}} \cdot \overbrace{|\vec{s}|}^{\text{Weglänge}} = W \checkmark$$



Arbeit – Skalarprodukt



Eine Straßenbahn wird von einem Einsatzfahrzeug abgeschleppt.

Auf einem geraden Abschnitt entlang des Vektors $\vec{s} = \begin{pmatrix} 40 \text{ m} \\ 20 \text{ m} \end{pmatrix}$

wirkt auf die Straßenbahn die konstante Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 2,5 \text{ kN} \\ -0,5 \text{ kN} \end{pmatrix}$.

Berechne die dabei verrichtete Arbeit W in Kilojoule (kJ).

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} 2,5 \text{ kN} \\ -0,5 \text{ kN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \text{ m} \\ 20 \text{ m} \end{pmatrix} = 2,5 \text{ kN} \cdot 40 \text{ m} + (-0,5 \text{ kN}) \cdot 20 \text{ m} = 90 \text{ kN} \cdot \text{m} = 90 \text{ kJ}$$

