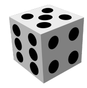
Verhältnisse

Umgangssprachlich werden Verhältnisse „a zu b“ bei Glücksspielen auf 2 verschiedene Arten verwendet:

1) Gewinnwahrscheinlichkeit 1 : 6 („günstig zu möglich“)

Zum Beispiel: Du möchtest mit einem gewöhnlichen Spielwürfel einen Sechser würfeln. Es gibt 6 mögliche Würfelergebnisse. Nur 1 Ergebnis davon ist für dich günstig.



Wir sagen: „Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist 1 zu 6.“

2) Chance 50 : 50 („günstig zu ungünstig“)

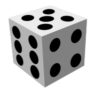
Zum Beispiel: Du wirfst eine gewöhnliche Münze und möchtest, dass die Münze auf der Seite „Zahl“ landet. Es gibt also 1 günstige Seite und 1 ungünstige Seite.

Wir sagen: „Die Chancen stehen 50 zu 50.“

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung meinen wir bei Verhältnissen immer „günstig zu möglich“.

Laplace-Würfel

Ein **Laplace-Würfel** ist ein *fairer* 6-seitiger Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind. Wir sagen auch: „Der Würfel hat die Augenzahlen von 1 bis 6.“



Fair bedeutet, dass jede der 6 Seiten gleich wahrscheinlich ist („1 zu 6“) und dass bei mehrmaligem Würfeln die Würfelergebnisse voneinander *unabhängig* sind: Würfelst du zum Beispiel die Augenzahl 6, dann ist auch beim nächsten Wurf wieder jede Augenzahl *gleich* wahrscheinlich. Faire Würfel haben *kein* geheimes Gedächtnis eingebaut.

a) Du wirfst einen Laplace-Würfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, …

…eine gerade Zahl zu würfeln?
„3 zu 6“ = 3 : 6

…mindestens die Augenzahl 2 zu würfeln?
„5 zu 6“ = 5 : 6

b) Du wirfst 2 Laplace-Würfel und berechnest die Augensumme (Summe der beiden Augenzahlen).

Trage in der Tabelle rechts die Augensummen ein.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Vor dem Würfeln wettest du auf eine Augensumme. Du gewinnst, wenn du die Augensumme richtig errätst. Auf welche Augensumme solltest du tippen?

Für die Augensumme 7 gibt es die meisten Kombinationen.
Gewinnwahrscheinlichkeit: „6 zu 36“

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Laplace-Würfeln …

…die Augensumme 6 zu würfeln?
„5 zu 36“ = 5 : 36

…die Augensumme 7 oder 8 zu würfeln?
„11 zu 36“ = 11 : 36

…eine durch 3 teilbare Augensumme zu würfeln?
„12 zu 36“ = 12 : 36

…eine gerade Augensumme zu würfeln?
„18 zu 36“ = 18 : 36

…eine durch 3 teilbare oder gerade Augensumme zu würfeln?
„24 zu 36“ = 24 : 36

c) Ich würfle geheim mit zwei Laplace-Würfeln.
Vom Würfelergebnis verrate ich dir nur so viel: „Die Augensumme ist größer als 8.“
Mit diesem Wissen im Hinterkopf: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, …

…dass die Augensumme 12 ist?
„1 zu 10“ = 1 : 10

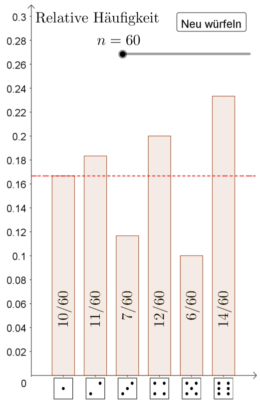
…dass ein Würfel einen Dreier zeigt?
„2 zu 10“ = 2 : 10

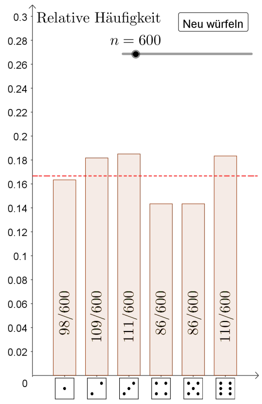
…dass die Augensumme höchstens 10 ist?
„7 zu 10“ = 7 : 10

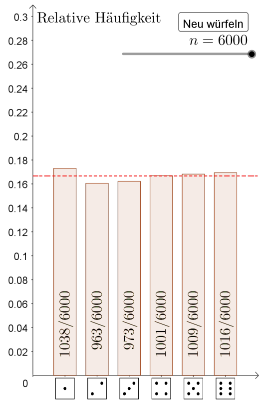
…dass die Augenzahlen verschieden sind?
„8 zu 10“ = 8 : 10

Empirisches Gesetz der großen Zahlen

Wir werfen einen Laplace-Würfel n Mal und zählen mit, welches Würfelergebnis wie oft auftritt.
Die relativen Häufigkeiten der Augenzahlen stellen wir in einem Säulendiagramm dar:







Wir beobachten, dass sich die relative Häufigkeit jeder Augenzahl für größer werdendes n stabilisiert:
Rel. Häufigkeit von ⚅ ≈ Wahrscheinlichkeit von ⚅ = „1 zu 6“ $= 1 : 6 = \frac{1}{6} = 16{,}66...\%$

Es *kann* auch mit einem fairen Würfel passieren, dass wir in einer Glückssträhne einen Sechser nach dem anderen würfeln.
Allerdings beobachten wir eine solche Ergebnisfolge nach dem **Empirischen Gesetz der großen Zahlen** im Normalfall *nicht*.
Mehr zur Berechnung solcher Wahrscheinlichkeiten findest du am Arbeitsblatt – Baumdiagramme und Zufallsvariablen.

Laplace-Experimente

Ein **Zufallsexperiment** kann verschiedene **Ergebnisse** haben. Das Ergebnis ist im Vorhinein *nicht* bekannt.
Ein Zufallsexperiment heißt **Laplace-Experiment**, wenn es die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

1) Es gibt nur *endlich* viele Ergebnisse.

2) Jedes dieser Ergebnisse tritt mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein.

Zum Beispiel gibt es beim Wurf eines Laplace-Würfels 6 mögliche Ergebnisse: ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅
Jedes dieser Ergebnisse tritt mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ ein.
Für die **Wahrscheinlichkeit**, dass die gewürfelte Augenzahl mindestens 5 ist, gilt:

$$\frac{\textbf{Anzahl günstige Ergebnisse}}{\textbf{Anzahl mögliche Ergebnisse}} = \frac{2}{6} = 33{,}33...\,\%$$

Roulette

Beim Roulette gibt es 37 Felder, die mit den Zahlen von 0 bis 36 durchnummeriert sind.
Davon sind 18 Felder rot, 18 Felder schwarz, und ein Feld ist grün.
Mit einer Kugel wird ein Feld nach dem *Zufallsprinzip* ausgewählt.

Eine Auswahl nach dem *Zufallsprinzip* ist fair: Alle möglichen Ergebnisse werden mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt. Das gilt auch bei wiederholter Durchführung des Zufallsexperiments. Die Roulette-Kugel hat *kein* geheimes Gedächtnis eingebaut.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass …

1) … das grüne Feld ausgewählt wird: $\frac{1}{37} = 2{,}70...\,\%$

2) … ein rotes Feld ausgewählt wird: $\frac{18}{37} = 48{,}64...\,\%$

3) … ein Feld mit einer Zahl von 1 bis 12 ausgewählt wird: $\frac{12}{37} = 32{,}43...\,\%$

Zufallsgenerator

Ein Zufallsgenerator erzeugt nach dem Zufallsprinzip eine natürliche Zahl von 1 bis 420.
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl …

1) …einstellig ist: $\frac{9}{420} = 2{,}14...\,\%$

2) …zweistellig ist: $\frac{90}{420} = 21{,}42...\,\%$

3) …dreistellig ist: $\frac{321}{420} = 76{,}42...\,\%$

```
int getRandomNumber()
{
    return 4;  // chosen by fair dice roll.
               // guaranteed to be random.
}
```

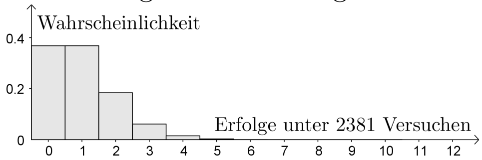
Quelle: https://xkcd.com/221

1 zu …

Lukas kann sich unter der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}042\,\% = 0{,}000\,42$ wenig vorstellen.
Um die Wahrscheinlichkeit p als Verhältnis $1 : x$ darzustellen, löst er die folgende Gleichung:

$$p = \frac{1}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{p} = 2380{,}9...$$

Die Wahrscheinlichkeit p beträgt also rund 1 zu 2381.



Wird der Versuch 2381 Mal durchgeführt, tritt das Ereignis mit Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}042\,\%$ *durchschnittlich* 1 Mal ein.
Es *kann* bei den 2381 Versuchen aber auch kein einziges Mal eintreten oder 2 Mal oder 3 Mal, …, oder 2381 Mal.
Mehr zur Berechnung solcher Wahrscheinlichkeiten findest du am Arbeitsblatt – Binomialverteilung.

Kombinatorik

Zur Stundenwiederholung werden aus einer Klasse mit 28 Schüler*innen
insgesamt 5 verschiedene Schüler*innen nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, um aus 28 Personen eine Gruppe von 5 Personen auszuwählen?

$$\frac{28!}{5! \cdot 23!} = \binom{28}{5} = 98\,280$$

Die beiden Schülerinnen Melanie und Stefanie aus dieser Klasse wollen wissen:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass …

1) …sie *beide nicht* zur Wiederholung ausgewählt werden?

$$\frac{\binom{26}{5}}{\binom{28}{5}} = 66{,}93...\,\%$$

Melanie und Stefanie sollen *nicht* ausgewählt werden.
Die 5 Schüler*innen müssen also aus den anderen 26 Schüler*innen ausgewählt werden.

2) …sie *beide* zur Wiederholung ausgewählt werden?

$$\frac{\binom{26}{3}}{\binom{28}{5}} = 2{,}64...\,\%$$

Melanie und Stefanie sollen beide ausgewählt werden.
Es müssen also noch 3 Schüler*innen aus den anderen 26 Schüler*innen ausgewählt werden.

3) …*genau eine* von ihnen zur Wiederholung ausgewählt wird?

$$\frac{\binom{26}{4} \cdot 2}{\binom{28}{5}} = 30{,}42...\,\%$$

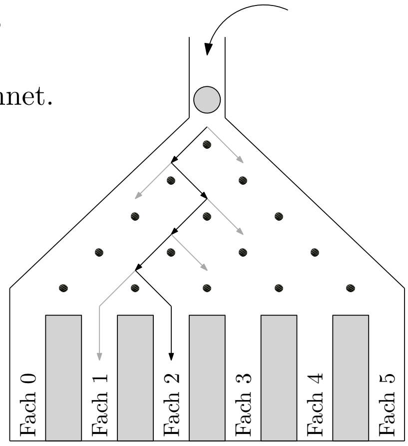
Fallunterscheidung:
Entweder die Gruppe besteht nur aus Melanie und 4 der 26 anderen Schüler*innen.
Oder die Gruppe besteht nur aus Stefanie und 4 der 26 anderen Schüler*innen.

Oder: $100\,\% - 66{,}93...\,\% - 2{,}64...\,\% = 30{,}42...\,\%$

Hier berechnen wir die Wahrscheinlichkeiten durch Abzählen der günstigen bzw. möglichen Ergebnisse.
Diese Wahrscheinlichkeiten können wir auch mithilfe sogenannter Baumdiagramme berechnen.
Es hängt von der Aufgabenstellung ab, welcher der beiden Lösungswege effizienter ist.

Galton-Brett

Jedes Mal, wenn die oben eingeworfene Kugel auf einen Nagel ● trifft, fällt sie nach dem Zufallsprinzip entweder nach links oder nach rechts.
Ein möglicher Weg, bei dem die Kugel im Fach 2 landet, ist eingezeichnet.



Wie viele mögliche Wege gibt es, bis die Kugel schließlich in irgendeinem der 6 Fächer landet?

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel …

1) … im Fach 0 landet?

2) … im Fach 1 landet?

3) … im Fach 2 landet?

1) $\dfrac{1}{32} = 3{,}125\,\%$

2) $\dfrac{5}{32} = 15{,}625\,\%$

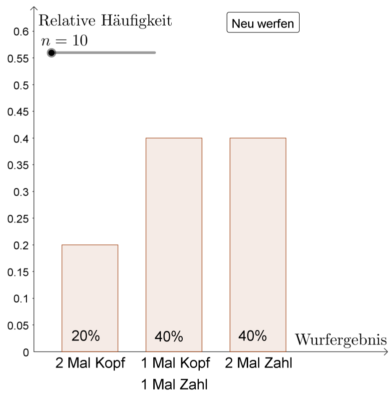
3) $\dfrac{\binom{5}{2}}{32} = \dfrac{10}{32} = 31{,}25\,\%$ Oder: $50\,\% - 3{,}125\,\% - 15{,}625\,\% = 31{,}25\,\%$

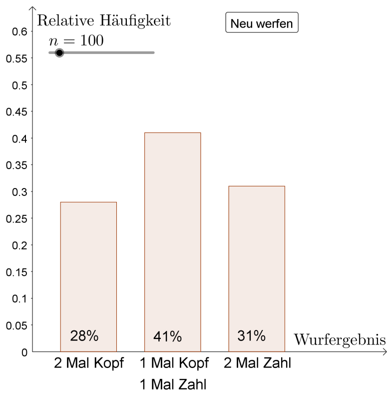
Jeder Weg ist eine Abfolge von insgesamt 5 Schritten nach links oder nach rechts.
Der eingezeichnete Weg kann zum Beispiel so codiert werden: (L, R, L, L, R)
Die Wege in Fach 2 sind genau jene, die aus drei L und zwei R bestehen.
Deshalb gibt es $\frac{5!}{2!\cdot 3!} = \binom{5}{2} = 10$ Wege in das Fach 2.

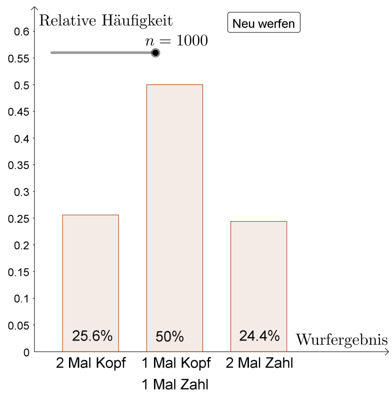
Kein Laplace-Experiment

Wir werfen gleichzeitig zwei *nicht* unterscheidbare faire Münzen hoch in die Luft.
Nach der Landung am Boden können wir 3 mögliche Ergebnisse beobachten:
i) 2 Mal Kopf **ii)** 1 Mal Kopf und 1 Mal Zahl **iii)** 2 Mal Zahl

Diese 3 beobachtbaren Ergebnisse sind aber *nicht* gleich wahrscheinlich.
Eine Simulation legt nahe, dass sich die relativen Häufigkeiten bei $25\,\%/50\,\%/25\,\%$ stabilisieren:







Warum sind die drei beobachtbaren Ergebnisse *nicht* gleich wahrscheinlich?

Markiert man eine Münze zum Beispiel mit einer Farbe, dann gibt es 4 (tatsächlich) gleich wahrscheinliche Ergebnisse: (Kopf, Kopf), (Kopf, Zahl), (Zahl, Kopf), (Zahl, Zahl)
Das Ergebnis **ii)** tritt deshalb mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{4} = 50\,\%$ auf.

Die *falsche* Annahme, dass in jedem Zufallsexperiment alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sein müssen, ist ein beliebter Fehler. Selbst Leibniz – Mitentdecker der Differentialrechnung – irrte sich mit seiner Behauptung, dass bei 2 fairen Würfeln die Augensummen 11 und 12 gleich wahrscheinlich wären, da jeweils nur ein beobachtbares Ergebnis $5+6$ bzw. $6+6$ zu dieser Augensumme führe. Im 20. Jahrhundert legte Kolmogorow das mathematische Fundament zur Behandlung auch jener Zufallsexperimente, bei denen die möglichen Ergebnisse *nicht* mit gleicher Wahrscheinlichkeit eintreten (AB – Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeitsräume).