



Die **Differentialgleichungen** (DGL)

$$1) \quad y''(x) - 6 \cdot y'(x) + 8 \cdot y(x) = 32 \cdot x,$$

$$2) \quad y''(x) + 6 \cdot y'(x) + 9 \cdot y(x) = e^{2 \cdot x} \quad \text{und}$$

$$3) \quad y''(x) - 4 \cdot y'(x) + 13 \cdot y(x) = 42$$

haben alle die Form $y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = s(x)$.

Es sind **lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**.

- i) Sie haben **2. Ordnung**, weil y'' die höchste auftretende Ableitung von y ist. Es kommt zum Beispiel y''' *nicht* vor.
- ii) Sie sind **linear**, weil sie die Form $y''(x) + f(x) \cdot y'(x) + g(x) \cdot y(x) = s(x)$ haben.
Es kommen z. B. y^2 oder $y \cdot y'$ oder $\sin(y')$ *nicht* vor.
- iii) Sie haben **konstante Koeffizienten**, weil die Koeffizienten $f(x) = a$ und $g(x) = b$ *nicht* von x abhängen.

Wenn $s(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dann ist

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0$$

eine **homogene Differentialgleichung**.

Ansonsten nennt man

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = \overbrace{s(x)}^{\text{Störfunktion}}$$

eine **inhomogene Differentialgleichung**.

Zwei Integrationskonstanten



Ermittle die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y''(x) = x^2 + \cos(x)$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten $a = 0$ und $b = 0$.

$$y'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + \sin(x) + c_1$$

$$y(x) = \frac{1}{12} \cdot x^4 - \cos(x) + c_1 \cdot x + c_2$$

Superpositionsprinzip



Wenn y_1 und y_2 Lösungen der homogenen DGL

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0$$

sind, dann ist auch $y = y_1 + y_2$ eine Lösung dieser DGL, denn es gilt:

$$\begin{aligned} y'' + a \cdot y' + b \cdot y &= (y_1 + y_2)'' + a \cdot (y_1 + y_2)' + b \cdot (y_1 + y_2) = \\ &= \underbrace{y_1'' + a \cdot y_1' + b \cdot y_1}_{=0} + \underbrace{y_2'' + a \cdot y_2' + b \cdot y_2}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung



Tatsächlich gilt: Sind y_1 und y_2 zwei nicht-triviale linear unabhängige Lösungen der homogenen DGL

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0$$

dann hat *jede* Lösung y dieser DGL die Form $y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$.

Eine Funktion ist nicht-trivial, wenn sie verschieden von der (trivialen) **Nullfunktion** $y(x) = 0$ ist.

Nicht-triviale Funktionen y_1 und y_2 sind linear unabhängig, wenn es keine Konstante c gibt, sodass $y_2(x) = c \cdot y_1(x)$ für alle x gilt.



Wenn λ eine Lösung der **quadratischen Gleichung** $\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0$ ist,

dann ist $y(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung der homogenen DGL $y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0$.

Diese Behauptung folgt aus der **Kettenregel**:

$$y(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

$$y'(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x} \cdot \lambda = \lambda \cdot y(x)$$

$$y''(x) = \lambda \cdot y'(x) = \lambda^2 \cdot y(x)$$

Wir setzen in die homogene DGL $y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0$ ein:

$$\lambda^2 \cdot y(x) + a \cdot \lambda \cdot y(x) + b \cdot y(x) = 0 \iff y(x) \cdot [\lambda^2 + a \cdot \lambda + b] = 0$$

Wenn $\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0$ gilt, dann erfüllt also $y(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x}$ tatsächlich die zugehörige homogene DGL.



Die homogene DGL $y''(x) - 6 \cdot y'(x) + 8 \cdot y(x) = 0$ kannst du mit den folgenden Schritten lösen:

- 1) Stelle die zugehörige **charakteristische Gleichung** $\lambda^2 - 6 \cdot \lambda + 8 = 0$ auf.
- 2) Löse die charakteristische Gleichung.

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 8} = 3 \pm 1 \implies \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$$

Also sind die Funktionen y_1 und y_2 mit

$$y_1(x) = c_1 \cdot e^{4 \cdot x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = c_2 \cdot e^{2 \cdot x}$$

jeweils Lösungen dieser homogenen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

- 3) Für die allgemeine Lösung y gilt also:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = c_1 \cdot e^{4 \cdot x} + c_2 \cdot e^{2 \cdot x}$$

```

CAS
1 LöseDgl(y''-6*y'+8*y=0)
  → y = c1 e^{4x} + c2 e^{2x}
  
```



Für die allgemeine Lösung der homogenen DGL $y''(x) - 6 \cdot y'(x) + 8 \cdot y(x) = 0$ gilt:

$$y(x) = c_1 \cdot e^{4 \cdot x} + c_2 \cdot e^{2 \cdot x}$$

Ermittle jene spezielle Lösung dieser DGL, die $y(0) = 5$ und $y(1) = -3$ erfüllt.

$$\text{I: } c_1 + c_2 = 5 \implies c_1 = 5 - c_2$$

$$\text{II: } c_1 \cdot e^4 + c_2 \cdot e^2 = -3$$

$$\xrightarrow{\text{II}} 5 \cdot e^4 - c_2 \cdot e^4 + c_2 \cdot e^2 = -3 \implies c_2 = \frac{5 \cdot e^4 + 3}{e^4 - e^2} = 5,846\dots$$

$$\xrightarrow{\text{I}} c_1 = 5 - c_2 = -0,846\dots$$

$$\implies y(x) = -0,846\dots \cdot e^{4 \cdot x} + 5,846\dots \cdot e^{2 \cdot x}$$

Charakteristische Gleichung mit genau einer reellen Lösung



Die homogene DGL $y''(x) + 6 \cdot y'(x) + 9 \cdot y(x) = 0$ kannst du mit den folgenden Schritten lösen:

- 1) Stelle die zugehörige **charakteristische Gleichung** $\lambda^2 + 6 \cdot \lambda + 9 = 0$ auf.
- 2) Löse die charakteristische Gleichung.

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3$$

Also ist die Funktion y_1 mit $y_1(x) = c_1 \cdot e^{-3 \cdot x}$ eine Lösung dieser homogenen DGL.

Tatsächlich ist in diesem Fall mit genau einer reellen Lösung λ auch die Funktion y_2 mit $y_2(x) = c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda \cdot x} = c_2 \cdot x \cdot e^{-3 \cdot x}$ eine Lösung.

Setze y_2 in die DGL ein und rechne nach.

- 3) Für die allgemeine Lösung y gilt also:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = c_1 \cdot e^{-3 \cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-3 \cdot x}$$

Spezielle Lösung – Punkt & Steigung



Für die allgemeine Lösung der homogenen DGL $y''(x) + 6 \cdot y'(x) + 9 \cdot y(x) = 0$ gilt:

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-3 \cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-3 \cdot x}$$

Ermittle jene spezielle Lösung dieser DGL, die $y(0) = 4$ und $y'(0) = 2$ erfüllt.

$$y(0) = 4 \implies c_1 = 4$$

$$y'(x) = -3 \cdot c_1 \cdot e^{-3 \cdot x} + c_2 \cdot e^{-3 \cdot x} - 3 \cdot c_2 \cdot x \cdot e^{-3 \cdot x} \quad (\text{Kettenregel/Produktregel})$$

$$y'(0) = 2 \implies -3 \cdot c_1 + c_2 = 2 \implies c_2 = 14$$

$$\implies y(x) = 4 \cdot e^{-3 \cdot x} + 14 \cdot x \cdot e^{-3 \cdot x}$$

Charakteristische Gleichung ohne reelle Lösungen



Die homogene DGL $y''(x) - 4 \cdot y'(x) + 13 \cdot y(x) = 0$ kannst du mit den folgenden Schritten lösen:

- 1) Stelle die zugehörige **charakteristische Gleichung** $\lambda^2 - 4 \cdot \lambda + 13 = 0$ auf.
- 2) Ermittle die beiden **komplexen** Lösungen dieser charakteristischen Gleichung.

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm \sqrt{-9} \implies \lambda_1 = 2 + 3 \cdot i, \lambda_2 = 2 - 3 \cdot i$$

Also sind die Funktionen y_1 und y_2 mit

$$y_1(x) = c_1 \cdot e^{(2+3 \cdot i) \cdot x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = c_2 \cdot e^{(2-3 \cdot i) \cdot x}$$

jeweils Lösungen dieser homogenen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

- 3) Für die allgemeine Lösung y gilt also:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = c_1 \cdot e^{(2+3 \cdot i) \cdot x} + c_2 \cdot e^{(2-3 \cdot i) \cdot x}$$



Die homogene DGL $y''(x) - 4 \cdot y'(x) + 13 \cdot y(x) = 0$ hat in \mathbb{C} die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \cdot e^{(2+3i) \cdot x} + c_2 \cdot e^{(2-3i) \cdot x}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Mithilfe der [Eulerschen Formel](#)

$$e^{i \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$$

kann man zeigen, dass diese homogene DGL in \mathbb{R} die allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1 \cdot e^{2 \cdot x} \cdot \cos(3 \cdot x) + C_2 \cdot e^{2 \cdot x} \cdot \sin(3 \cdot x)$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ hat.



Zum Lösen der homogenen DGL $y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0$ unterscheiden wir bei der zugehörigen charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0$ also 3 Lösungsfälle:

- i) Die charakteristische Gleichung hat zwei reelle Lösungen λ_1 und λ_2 .
Dann gilt für die allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$$

- ii) Die charakteristische Gleichung hat genau eine reelle Lösung λ .
Dann gilt für die allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda \cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

- iii) Die charakteristische Gleichung hat keine reelle Lösung,
aber die beiden komplex konjugierten Lösungen $\alpha + i \cdot \beta$ und $\alpha - i \cdot \beta$.
Dann gilt für die allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) + c_2 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) \stackrel{(*)}{=} e^{\alpha \cdot x} \cdot A \cdot \sin(\beta \cdot x + \varphi)$$

(*) Diese letzte Darstellungsform kann man aus den [Summensätzen für Winkelfunktionen](#) folgern.



Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = s(x)$$

kannst du mit den folgenden Schritten ermitteln:

- 1) Löse die zugehörige homogene DGL mithilfe der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0$.

Die allgemeine Lösung y_h der homogenen DGL nennen wir auch kurz **homogene Lösung**.

- 2) Ermittle eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL.

Jede spezielle Lösung y_p der inhomogenen DGL nennen wir auch kurz **partikuläre Lösung**.

Wie auch bei linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung hilft dabei die Methode [Variation der Konstanten](#).

Man kann auch – abhängig von der Art der Störfunktion s – eine partikuläre Lösung mit einem passenden Ansatz ermitteln.

Wir verzichten an dieser Stelle auf eine Auflistung aller Ansätze inklusive Ausnahmen und Sonderfälle.

- 3) Die **allgemeine Lösung** der inhomogenen DGL ist dann $y = y_h + y_p$.



Die inhomogene DGL

$$y''(x) - 6 \cdot y'(x) + 8 \cdot y(x) = 32 \cdot x$$

hat eine partikuläre Lösung y_p mit $y_p(x) = k \cdot x + d$. Ermittle diese partikuläre Lösung y_p .

Hinweis: Ermittle y'_p und y''_p und setze in die inhomogene DGL ein. Vergleiche dann die Koeffizienten auf beiden Seiten.

$$y_p(x) = k \cdot x + d \implies y'_p(x) = k \implies y''_p(x) = 0$$

$$y''_p(x) - 6 \cdot y'_p(x) + 8 \cdot y_p(x) = 32 \cdot x$$

$$0 - 6 \cdot k + 8 \cdot k \cdot x + 8 \cdot d = 32 \cdot x$$

$$8 \cdot k \cdot x + 8 \cdot d - 6 \cdot k = 32 \cdot x$$

$$\text{I: } 8 \cdot k = 32 \implies k = 4$$

$$\text{II: } 8 \cdot d - 6 \cdot k = 0 \implies d = \frac{6 \cdot k}{8} = 3$$

$$\implies y_p(x) = 4 \cdot x + 3$$

Für die allgemeine Lösung y_h der zugehörigen homogenen DGL $y''(x) - 6 \cdot y'(x) + 8 \cdot y(x) = 0$ gilt:

$$y_h(x) = c_1 \cdot e^{4 \cdot x} + c_2 \cdot e^{2 \cdot x}$$

Für die allgemeine Lösung y der inhomogenen DGL gilt also:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 \cdot e^{4 \cdot x} + c_2 \cdot e^{2 \cdot x} + 4 \cdot x + 3$$



Die inhomogene DGL

$$y''(x) + 6 \cdot y'(x) + 9 \cdot y(x) = e^{2 \cdot x}$$

hat eine partikuläre Lösung y_p mit $y_p(x) = c \cdot e^{2 \cdot x}$. Ermittle diese partikuläre Lösung y_p .

$$y_p(x) = c \cdot e^{2 \cdot x} \implies y'_p(x) = 2 \cdot c \cdot e^{2 \cdot x} \implies y''_p(x) = 4 \cdot c \cdot e^{2 \cdot x}$$

$$y''_p(x) + 6 \cdot y'_p(x) + 9 \cdot y_p(x) = e^{2 \cdot x}$$

$$4 \cdot c \cdot e^{2 \cdot x} + 12 \cdot c \cdot e^{2 \cdot x} + 9 \cdot c \cdot e^{2 \cdot x} = e^{2 \cdot x}$$

$$4 \cdot c + 12 \cdot c + 9 \cdot c = 1$$

$$c = \frac{1}{25}$$

$$\implies y_p(x) = \frac{1}{25} \cdot e^{2 \cdot x}$$

Für die allgemeine Lösung y_h der zugehörigen homogenen DGL $y''(x) + 6 \cdot y'(x) + 9 \cdot y(x) = 0$ gilt:

$$y_h(x) = c_1 \cdot e^{-3 \cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-3 \cdot x}$$

Für die allgemeine Lösung y der inhomogenen DGL gilt also:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 \cdot e^{-3 \cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-3 \cdot x} + \frac{1}{25} \cdot e^{2 \cdot x}$$

Eine Kugel mit der Masse $m > 0$ hängt an einer Feder mit der Federkonstante $k > 0$.

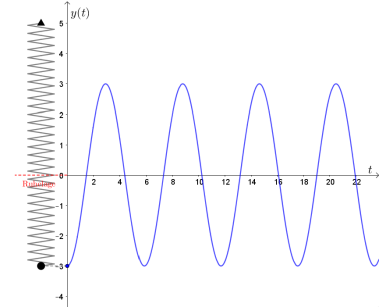
Die Ruhelage der Kugel ist $y = 0$.

Die Auslenkung der Kugel zum Zeitpunkt t ist $y(t)$.

Dann ist $y'(t)$ die **Geschwindigkeit** der Kugel zum Zeitpunkt t und $y''(t)$ die **Beschleunigung** der Kugel zum Zeitpunkt t .

Beachte, dass hier $y(t)$, $y'(t)$ und $y''(t)$ auch negativ sein können.

Nach dem **Hookeschen Gesetz** ist die Federkraft **direkt proportional** zur Auslenkung der Kugel.



Wenn man die Reibungskraft vernachlässigt, erhält man eine **harmonische Schwingung**.

In diesem Fall folgt aus dem **Zweiten Newtonschen Gesetz**:

$$\underbrace{m \cdot y''(t)}_{\text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}} = \underbrace{-k \cdot y(t)}_{\text{Federkraft}} \iff y''(t) + \frac{k}{m} \cdot y(t) = 0 \quad \text{mit } k > 0, \text{ denn: } \begin{aligned} y(t) = 0 &\iff y''(t) = 0 \\ y(t) > 0 &\iff y''(t) < 0 \\ y(t) < 0 &\iff y''(t) > 0 \end{aligned}$$

Wir lösen diese Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \implies \lambda = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \implies y(t) = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi\right)$$

Bei einer harmonischen Schwingung ist die Lösung also eine **allgemeine Sinusfunktion**.

Bei einer **linear gedämpften Schwingung** wirkt zusätzlich eine Dämpfungskraft, die direkt proportional zur aktuellen Geschwindigkeit der Kugel ist. Dann gilt:

$$\underbrace{m \cdot y''(t)}_{\text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}} = \underbrace{-k \cdot y(t)}_{\text{Federkraft}} - \underbrace{d \cdot y'(t)}_{\text{Dämpfungskraft}} \iff y''(t) + \frac{d}{m} \cdot y'(t) + \frac{k}{m} \cdot y(t) = 0 \quad d, k, m > 0$$

$$\lambda^2 + \frac{d}{m} \cdot \lambda + \frac{k}{m} = 0 \iff m \cdot \lambda^2 + d \cdot \lambda + k = 0 \iff \lambda_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4 \cdot k \cdot m}}{2 \cdot m}$$

i) Schwingfall: $d^2 < 4 \cdot k \cdot m \implies \lambda_1$ und λ_2 sind nicht reell.

Die Dämpfungskonstante d ist in diesem Fall noch klein genug, dass die Ruhelage $y = 0$ periodisch durchquert wird.

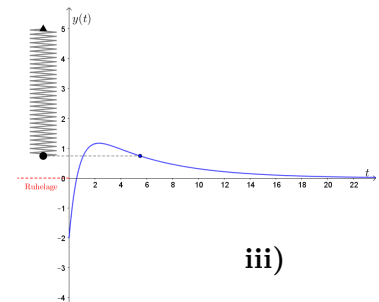
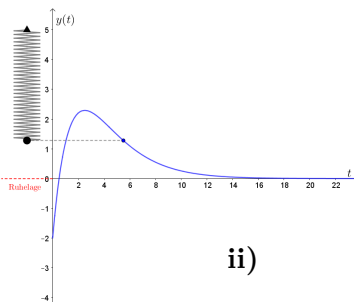
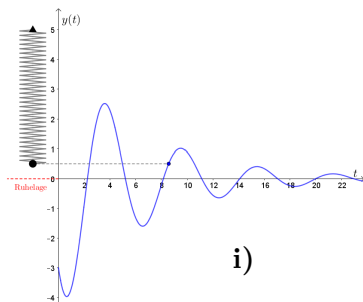
$$\implies y(t) = e^{-\frac{d}{2m} \cdot t} \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad \text{mit } \omega = \frac{\sqrt{4 \cdot k \cdot m - d^2}}{2 \cdot m}$$

ii) Aperiodischer Grenzfall: $d^2 = 4 \cdot k \cdot m \implies \lambda_1$ und λ_2 sind gleiche negative reelle Zahlen.

$$\implies y(t) = c_1 \cdot e^{-\frac{d}{2m} \cdot t} + c_2 \cdot t \cdot e^{-\frac{d}{2m} \cdot t}$$

iii) Kriechfall: $d^2 > 4 \cdot k \cdot m \implies \lambda_1$ und λ_2 sind verschiedene negative reelle Zahlen.

$$\implies y(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$$



Eine inhomogene DGL $m \cdot y''(t) = -k \cdot y(t) - d \cdot y'(t) + s(t)$ kann man erhalten, wenn weitere externe Kräfte wirken.

Dann kann eine ungünstige Störfunktion eine Schwingung auslösen, bei der die Amplitude immer größer wird (**Resonanzkatastrophe**).

