

Die rechts dargestellte **Matrix** A hat 4 Zeilen und 2 Spalten.

Es ist also eine 4×2 -Matrix. Sprechweise: „4 mal 2 – Matrix“

Mit $a_{32} = 8$ bezeichnen wir jenen Eintrag, der in der 3. Zeile und 2. Spalte ist.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 9 \\ 0 & 8 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Jede Matrix mit einer einzigen Spalte bzw. Zeile ist ein **Vektor** (Spaltenvektor bzw. Zeilenvektor).

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Links ist die 3×4 -**Nullmatrix** N dargestellt.

Rechts ist die 3×3 -**Einheitsmatrix** E dargestellt.

Jede Einheitsmatrix ist quadratisch, hat in der Diagonale von links oben nach rechts unten nur 1er und überall sonst nur 0er.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wenn zwei Matrizen A und B in ihrer Zeilenanzahl und in ihrer Spaltenanzahl übereinstimmen, dann können wir sie komponentenweise addieren. Zum Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \implies A + B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Berechne das Ergebnis.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ -7 & 3 & -8 \\ 9 & -6 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & -3 \\ 5 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Nullmatrizen sind die **neutralen Elemente** der Matrizenaddition.

Die Multiplikation zweier Matrizen erfolgt *nicht* komponentenweise.

Wenn A eine $m \times p$ -Matrix und B eine $p \times n$ -Matrix ist, dann ist $C = A \cdot B$ eine $m \times n$ -Matrix.

Zum Beispiel:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}}_{2 \times 4} \quad B = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}}_{4 \times 3} \implies C = A \cdot B = \underbrace{\begin{pmatrix} 12 & -15 & 17 \\ 34 & 12 & 30 \end{pmatrix}}_{2 \times 3}$$

Um den Eintrag $c_{12} = -15$ in **Zeile 1** und **Spalte 2** von $C = A \cdot B$ zu berechnen,

verwendet man die **Zeile 1** von A und die **Spalte 2** von B folgendermaßen:

$$c_{12} = 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 0 + (-5) \cdot 4 = 8 - 3 + 0 - 20 = -15$$

Um allgemein den Eintrag c_{ij} in **Zeile i** und **Spalte j** von $C = A \cdot B$ zu berechnen,

verwendet man die **Zeile i** von A und die **Spalte j** von B folgendermaßen:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Berechne das Ergebnis.

a) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -7 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 6 \\ 4 & -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -10 & 27 & -27 \\ -9 & -6 & 22 & -51 \\ 3 & 12 & -39 & 72 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Einheitsmatrizen sind die **neutralen Elemente** der Matrizenmultiplikation.

c) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$

Die Matrizenmultiplikation erfüllt im Allgemeinen *nicht* das **Kommutativgesetz**: $A \cdot B \neq B \cdot A$

LGS in 2 Variablen (Matrizenschreibweise) 

Schreibe das folgende **lineare Gleichungssystem in 2 Variablen** in Matrizenschreibweise. Trage dazu Zahlen richtig in die Kästchen ein.

$$\begin{cases} 4 \cdot x - 2 \cdot y = 10 \\ 3 \cdot x + 5 \cdot y = -8 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix}$$

LGS in 3 Variablen (Matrizenschreibweise) 

Schreibe das folgende **lineare Gleichungssystem in 3 Variablen** in Matrizenschreibweise.

$$\begin{cases} 3 \cdot x + y - 4 \cdot z = 5 \\ -2 \cdot x + 4 \cdot z = -3 \\ x - 2 \cdot y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LGS in n Variablen (Matrizenschreibweise) 

Allgemein können wir jedes lineare Gleichungssystem mit n Gleichungen in n Variablen x_1, x_2, \dots, x_n folgendermaßen in **Matrizenschreibweise** angeben:

$$\begin{matrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{matrix} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Wir schreiben dafür auch kurz: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

Inverse Matrix 

Genau dann, wenn das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eine *eindeutige* Lösung \vec{x} hat, hat die Matrix A eine zugehörige **inverse Matrix** A^{-1} . Für diese gilt:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Einheitsmatrix}}$$

Zur Berechnung der inversen Matrix gibt es den **Gauß-Jordan-Algorithmus**.

Genau dann, wenn das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eine *eindeutige* Lösung \vec{x} hat, können wir diese mithilfe der zugehörigen inversen Matrix A^{-1} berechnen:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \iff \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{\text{Einheitsmatrix}} \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \iff \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Löse das lineare Gleichungssystem $\begin{cases} x + y + 3 \cdot z = -1 \\ -x + 2 \cdot z = -2 \\ 5 \cdot x + 2 \cdot y - z = 7 \end{cases}$ mit folgenden 3 Schritten:

1) Stelle das lineare Gleichungssystem in Matrixschreibweise $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ dar.

2) Zeige, dass $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -2 \\ -9 & 16 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ tatsächlich die inverse Matrix von A ist.

Anmerkung: Wenn die Einträge der Matrizen **reelle Zahlen** sind, dann kann man aus $A \cdot A^{-1} = \text{Einheitsmatrix}$ automatisch auch $A^{-1} \cdot A = \text{Einheitsmatrix}$ folgern und umgekehrt. Als Probe genügt also eine dieser beiden Matrizenmultiplikationen.

3) Berechne mithilfe von A^{-1} die Lösung \vec{x} des linearen Gleichungssystems.

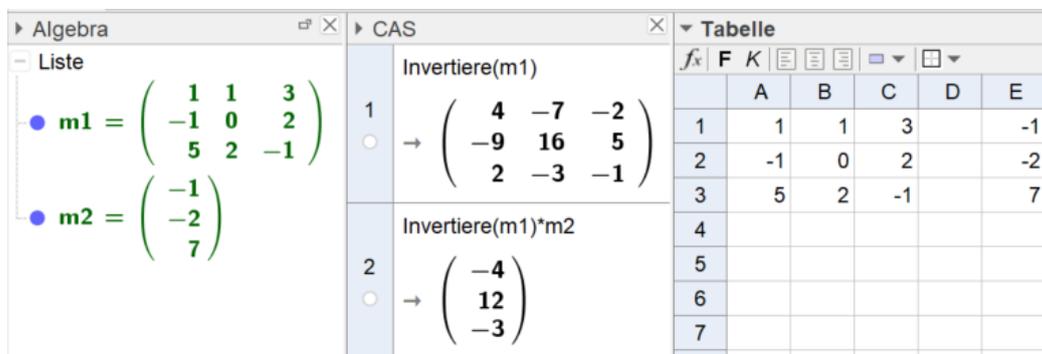
$$1) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$2) A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -7 & -2 \\ -9 & 16 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$3) \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -2 \\ -9 & 16 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems ist also $x = -4, y = 12, z = -3$.

Du *kannst* das vorherige Gleichungssystem in GeoGebra wie folgt mit Matrizen lösen:



Um eine Matrix zu erzeugen, markiere die Zellen in der Tabellenansicht \rightsquigarrow Rechtsklick \rightsquigarrow Erzeugen \rightsquigarrow Matrix.

Zum **Lösen linearer Gleichungssysteme mit GeoGebra** bringt die Matrixschreibweise *keine* Vorteile.

Für drei Zahlen x , y und z gilt:

- Die größte Zahl x ist um 42 kleiner als die Summe der beiden anderen Zahlen.
- Die kleinste Zahl z ist um 40% kleiner als die größte Zahl.
- Das **arithmetische Mittel** der größten und kleinsten Zahl ist um 8 kleiner als die dritte Zahl y .

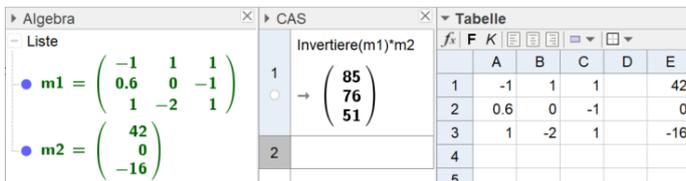
- 1) Erstelle ein Gleichungssystem zur Berechnung von x , y und z in Matrizenschreibweise.
- 2) Löse das Gleichungssystem mit Technologieeinsatz.

1) I : $x + 42 = y + z \iff -x + y + z = 42$

II : $z = 0,6 \cdot x \iff 0,6 \cdot x - z = 0$

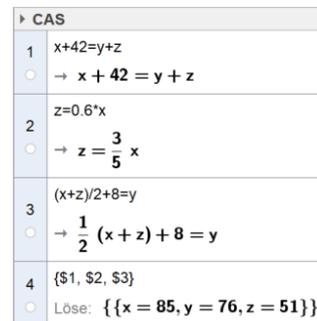
III : $\frac{x+z}{2} + 8 = y \iff x + z + 16 = 2 \cdot y \iff x - 2 \cdot y + z = -16$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0,6 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix}$$

2) 

The screenshot shows a CAS interface with a list of matrices $m1$ and $m2$. $m1$ is the coefficient matrix from the system above, and $m2$ is the constant vector. The CAS window shows the inverse of $m1$ multiplied by $m2$, resulting in the vector $(85, 76, 51)^T$.

oder



The screenshot shows the same CAS interface with the system of equations entered. The solution is displayed as $\{x = 85, y = 76, z = 51\}$.

Die drei Zahlen sind $x = 85$, $y = 76$ und $z = 51$.

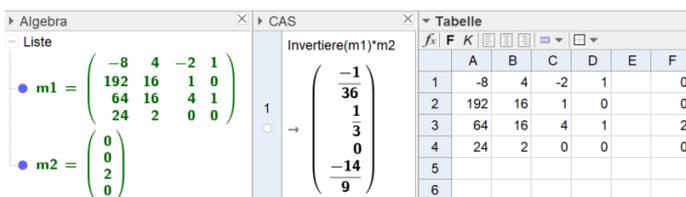
Umgekehrte Kurvenuntersuchung 

Die **Polynomfunktion** f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ hat die folgenden Eigenschaften:

- Die Funktion hat die **Nullstelle** $x = -2$.
- Die Funktion wechselt an der Stelle $x = 8$ das **Monotonieverhalten**.
- Die Funktion hat den **Wendepunkt** $W = (4 | 2)$.

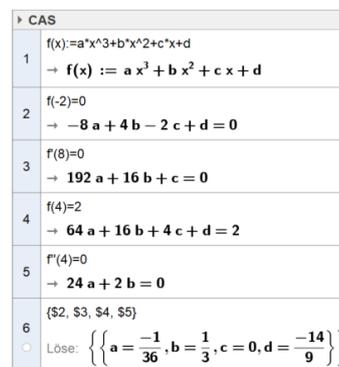
- 1) Erstelle ein Gleichungssystem zur Berechnung von a , b , c und d in Matrizenschreibweise.
- 2) Ermittle die Koeffizienten a , b , c und d mit Technologieeinsatz.

1)
$$\begin{pmatrix} -8 & 4 & -2 & 1 \\ 192 & 16 & 1 & 0 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \\ 24 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) 

The screenshot shows a CAS interface with a list of matrices $m1$ and $m2$. $m1$ is the coefficient matrix from the system above, and $m2$ is the constant vector. The CAS window shows the inverse of $m1$ multiplied by $m2$, resulting in the vector $(-1/36, 1/3, 0, -14/9)^T$.

$\implies a = -\frac{1}{36}, b = \frac{1}{3}, c = 0, d = -\frac{14}{9}$



The screenshot shows the same CAS interface with the system of equations entered. The solution is displayed as $\{a = -\frac{1}{36}, b = \frac{1}{3}, c = 0, d = -\frac{14}{9}\}$.

