Kleine Lösungsformel

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $\boldsymbol{x^2 + p \cdot x + q = 0}$ sind

$$\boldsymbol{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}\,.$$

Mehr dazu findest du auf dem Arbeitsblatt – Quadratische Gleichungen.

Quadratische Gleichung → Lösungen

Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung $2 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 42 = 0$.

Produkt-Null-Satz

Berechne ohne Taschenrechner: $\pi^{10} \cdot \sqrt{5-3} \cdot (-3)^7 \cdot 42 \cdot 0 \cdot (4 - 7^2) =$ ______

Ein Produkt ist genau dann 0, wenn mindestens ein Faktor 0 ist.

Lösungen → Quadratische Gleichung

Gesucht ist eine quadratische Gleichung mit den Lösungen -4 und 2.

1) Fülle die Lücken unten so aus, dass beide Zahlen -4 und 2 Lösungen der Gleichung sind.

2) Multipliziere die Klammern aus.

$$0 = (x - \boxed{}) \cdot (x - \boxed{}) =$$

Lösungen ↔ Koeffizienten

Die quadratische Gleichung

$$0 = (x-2) \cdot (x-5) = x^2 - 2 \cdot x - 5 \cdot x + 10 = x^2 - 7 \cdot x + 10$$

hat die Lösungen ______ und ______ .

Die Koeffizienten -7 und 10 sind eng mit den beiden Lösungen verknüpft. Hast du eine Vermutung?

Lösungen ↔ Koeffizienten

Die quadratische Gleichung

$$0 = (x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 + p \cdot x + q$$

hat die Lösungen ______ und ______ . Wir multiplizieren aus und heben x heraus:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 - x_1 \cdot x - x \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 = x^2 + (-x_1 - x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2$$

Vergleiche die Koeffizienten: $p =$ ______________ und $q =$ ______________ .

Satz von Vieta

x_1 und x_2 sind genau dann die Lösungen der Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$, wenn gilt:

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -p} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = q}$$

Mit den Lösungen können wir den quadratischen Term in **Linearfaktoren** zerlegen:

$$x^2 + p \cdot x + q = \underbrace{(x - x_1)}_{\text{Linearfaktor}} \cdot \underbrace{(x - x_2)}_{\text{Linearfaktor}}$$

Satz von Vieta – Beweis

Wenn x_1 und x_2 die Lösungen von $x^2 + p \cdot x + q = 0$ sind, dann gilt

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Rechne nach, dass $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$ gilt. Tipp: $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

Sind umgekehrt x_1 und x_2 zwei Zahlen mit $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$, dann gilt

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 + p \cdot x + q.$$

Setzen wir auf der linken Seite für x die Zahl x_1 oder x_2 ein, ist das Ergebnis 0.
Also muss auch die rechte Seite 0 sein, wenn wir für x die Zahl x_1 oder x_2 einsetzen.
x_1 und x_2 sind also Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$.

Teiler von q

$x^2 + p \cdot x + q = 0$ ist eine quadratische Gleichung mit $p, q \in \mathbb{Z}$.
Begründe folgende Behauptungen für die Lösungen x_1 und x_2 der Gleichung.

1) *„Wenn $x_1 \in \mathbb{Z}$ ist, dann muss auch $x_2 \in \mathbb{Z}$ sein.“*

2) *„Wenn eine Lösung ganzzahlig ist, dann sind beide Lösungen Teiler von q.“*

Zerlegung in Linearfaktoren

Zerlege in Linearfaktoren und ermittle die Lösungen. Alle Lösungen sind ganzzahlig.

a) $x^2 - 6 \cdot x - 7 = 0$

b) $x^2 + 8 \cdot x + 15 = 0$

c) $2 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 42 = 0$