Produkt-Null-Satz

Berechne ohne Taschenrechner: $3{,}1415^{10} \cdot \sqrt{5-3} \cdot (-3)^7 \cdot 42 \cdot 0 \cdot (4-7^2) = 0$

Produkt-Null-Satz: „*Ein Produkt ist genau dann* 0*, wenn mindestens ein Faktor* 0 *ist.*“

Linearfaktorform → Nullstellen

Ermittle die Nullstellen der quadratischen Funktion f mit: $f(x) = -2 \cdot (x-5) \cdot (x+3)$

$$f(x) = 0 \iff -2 \cdot (x-5) \cdot (x+3) = 0 \iff x-5 = 0 \text{ oder } x+3 = 0 \iff$$
$$\iff x = 5 \text{ oder } x = -3$$

Nullstellen → Linearfaktorform

Die quadratische Funktion f hat die Nullstellen -4 und 2.

1) Trage jeweils das richtige Rechenzeichen $+$ oder $-$ in die Kästchen ein:

$$f(x) = 2 \cdot (x+4) \cdot (x-2)$$

2) Ermittle die Polynomform $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ dieser quadratischen Funktion.

3) Ermittle die Scheitelpunktform $f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ dieser quadratischen Funktion.

Hinweis: Der Funktionsgraph ist symmetrisch zur senkrechten Gerade durch den Scheitelpunkt $S = (x_S \mid y_S)$.

2) $f(x) = 2 \cdot (x^2 + 4 \cdot x - 2 \cdot x - 8) = 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 16$

3) Aus der Symmetrie folgt $x_S = \frac{-4+2}{2} = -1$ und damit $y_S = f(x_S) = 2 \cdot 3 \cdot (-3) = -18$.

Für die Scheitelpunktform gilt also: $f(x) = 2 \cdot (x+1)^2 - 18$

Linearfaktorform

Jede quadratische Funktion f kann in der **Linearfaktorform**

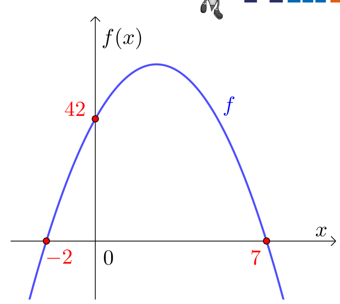
$$\boldsymbol{f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}$$

angegeben werden. Die beiden Faktoren $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ heißen **Linearfaktoren**.

Aus dem Produkt-Null-Satz folgt, dass x_1 und x_2 die Nullstellen von f sind.

Linearfaktorform

Rechts ist der Graph einer quadratischen Funktion f dargestellt.
Ermittle die Linearfaktorform von f.



Die quadratische Funktion f hat die Nullstellen -2 und 7. Also gilt:

$$f(x) = a \cdot (x+2) \cdot (x-7)$$

$$f(0) = 42 \implies a \cdot 2 \cdot (-7) = 42 \implies a = -3$$

$$\implies f(x) = -3 \cdot (x+2) \cdot (x-7)$$

Lösungen ↔ Koeffizienten

Wir multiplizieren aus:

$$(x-2)\cdot(x-5) = x^2 - 2\cdot x - 5\cdot x + 10 = x^2 - 7\cdot x + 10$$

Die quadratische Gleichung $x^2 - 7\cdot x + 10 = 0$ hat also die Lösungen 2 und 5.
Die Koeffizienten -7 und 10 sind eng mit den beiden Lösungen verknüpft. Hast du eine Vermutung?
Allgemein gilt:

$$(x-x_1)\cdot(x-x_2) = x^2 - x_1\cdot x - x\cdot x_2 + x_1\cdot x_2 = x^2 - (x_1+x_2)\cdot x + x_1\cdot x_2$$

Satz von Vieta

Die Lösungen der Gleichung $x^2 + p\cdot x + q = 0$ sind genau dann x_1 und x_2, wenn gilt:

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -p} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{x_1\cdot x_2 = q}$$

Mit den beiden Lösungen können wir die Zerlegung in Linearfaktoren ermitteln:

$$x^2 + p\cdot x + q = \underbrace{(x-x_1)}_{\text{Linearfaktor}} \cdot \underbrace{(x-x_2)}_{\text{Linearfaktor}}$$

Teiler von q

Wenn die quadratische Gleichung $x^2 + p\cdot x + q = 0$ ganzzahlige Koeffizienten p und q und ganzzahlige Lösungen x_1 und x_2 hat, dann können wir diese durch Probieren schnell ermitteln:
Die quadratische Gleichung $x^2 - 2\cdot x - 15 = 0$ hat zum Beispiel zwei ganzzahlige Lösungen x_1 und x_2.

i) Aus dem Satz von Vieta folgt $x_1 + x_2 = 2$ und $x_1\cdot x_2 = -15$.

ii) Die beiden ganzzahligen Lösungen müssen also ganzzahlige Teiler von -15 sein: $\pm1, \pm3, \pm5, \pm15$
Aus den möglichen Lösungspaaren

$$1\cdot(-15) = 3\cdot(-5) = 5\cdot(-3) = 15\cdot(-1)$$

erfüllt nur eines auch die Bedingung $x_1 + x_2 = 2$. Die zwei Lösungen sind also 5 und -3.
Mit den Lösungen können wir auch die Zerlegung in Linearfaktoren angeben:

$$x^2 - 2\cdot x - 15 = (x-5)\cdot(x+3)$$

Teiler von q

Die gegebene quadratische Gleichung hat ganzzahlige Lösungen.
Ermittle die Zerlegung in Linearfaktoren und die Lösungen.

a) $0 = x^2 + 6\cdot x - 7 = (x-1)\cdot(x+7)$ hat die Lösungen 1 und -7.

b) $0 = x^2 - 7\cdot x + 10 = (x-2)\cdot(x-5)$ hat die Lösungen 2 und 5.

c) $0 = x^2 + 12\cdot x = x\cdot(x+12)$ hat die Lösungen 0 und -12.

d) $0 = x^2 - 16 = (x-4)\cdot(x+4)$ hat die Lösungen 4 und -4.

e) $0 = x^2 - 6\cdot x + 9 = (x-3)\cdot(x-3)$ hat die Lösung 3.

Polynomform → Linearfaktorform

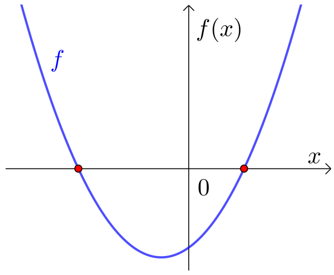
Für die rechts dargestellte quadratische Funktion f gilt:

$$f(x) = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 24$$

Die Funktion hat ganzzahlige Nullstellen.

1) Ermittle die Linearfaktorform von f.

2) Ermittle die Nullstellen von f.



1) $f(x) = 3 \cdot (x^2 + 2 \cdot x - 8) = 3 \cdot (x + 4) \cdot (x - 2)$

2) $f(x) = 0 \iff 3 \cdot (x + 4) \cdot (x - 2) = 0 \iff x = -4$ oder $x = 2$

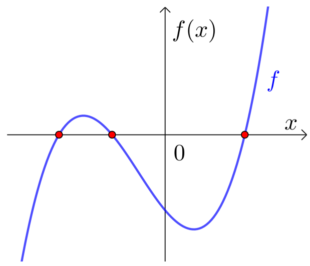
Polynomfunktionen

Die Gleichung

$$(x + 2) \cdot (x + 4) \cdot (x - 3) = 0$$

hat die Lösungen -2, -4 und 3.

Multipliziere die linke Seite vollständig aus.



$$\begin{aligned}(x + 2) \cdot (x + 4) \cdot (x - 3) &= (x^2 + 6 \cdot x + 8) \cdot (x - 3) = \\ &= x^3 - 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 8 \cdot x - 24 = \\ &= x^3 + 3 \cdot x^2 - 10 \cdot x - 24\end{aligned}$$

Rechts oben ist der Graph der Polynomfunktion f mit $f(x) = x^3 + 3 \cdot x^2 - 10 \cdot x - 24$ dargestellt.
Mehr dazu findest du auf dem Arbeitsblatt – Polynomfunktionen.

Satz von Vieta – Beweis

Wir haben die kleine Lösungsformel für quadratische Gleichungen hergeleitet. Daraus folgt:
Wenn $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$ gilt, dann sind die reellen Zahlen x_1 und x_2 mit $x_1 \leq x_2$ genau dann Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$, wenn

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D}$$

gilt. Rechne nach, dass $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$ gilt.

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D} - \frac{p}{2} + \sqrt{D} = -2 \cdot \frac{p}{2} = -p \checkmark$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q \checkmark$$

Sind umgekehrt x_1 und x_2 zwei Zahlen mit $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$, dann gilt:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = x^2 + p \cdot x + q$$

Aus dem Produkt-Null-Satz folgt, dass x_1 und x_2 Lösungen von $x^2 + p \cdot x + q = 0$ sind.