

Produkt-Null-Satz



Berechne ohne Taschenrechner: $3,1415^{10} \cdot \sqrt{5-3} \cdot (-3)^7 \cdot 42 \cdot 0 \cdot (4-7^2) =$

Produkt-Null-Satz: „Ein Produkt ist genau dann 0, wenn mindestens ein Faktor 0 ist.“

Linearfaktorform \rightarrow Nullstellen



Ermittle die **Nullstellen** der **quadratischen Funktion** f mit: $f(x) = -2 \cdot (x - 5) \cdot (x + 3)$

$$f(x) = 0 \iff -2 \cdot (x - 5) \cdot (x + 3) = 0 \iff \text{} = 0 \text{ oder } \text{} = 0 \iff$$

$$\iff x = \text{} \text{ oder } x = \text{}$$

Nullstellen \rightarrow Linearfaktorform



Die quadratische Funktion f hat die Nullstellen -4 und 2 .

1) Trage jeweils das richtige Rechenzeichen $+$ oder $-$ in die Kästchen ein:

$$f(x) = 2 \cdot (x \text{ } 4) \cdot (x \text{ } 2)$$

2) Ermittle die **Polynomform** $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ dieser quadratischen Funktion.

3) Ermittle die **Scheitelpunktform** $f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ dieser quadratischen Funktion.

Hinweis: Der Funktionsgraph ist symmetrisch zur senkrechten Gerade durch den Scheitelpunkt $S = (x_S | y_S)$.

Linearfaktorform



Jede quadratische Funktion f kann in der **Linearfaktorform**

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

angegeben werden. Die beiden Faktoren $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ heißen **Linearfaktoren**.

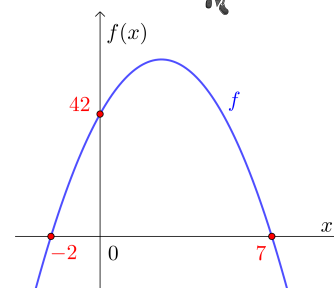
Aus dem Produkt-Null-Satz folgt, dass x_1 und x_2 die Nullstellen von f sind.

Linearfaktorform



Rechts ist der Graph einer quadratischen Funktion f dargestellt.

Ermittle die Linearfaktorform von f .





Wir multiplizieren aus:

$$(x - 2) \cdot (x - 5) = x^2 - 2 \cdot x - 5 \cdot x + 10 = x^2 - 7 \cdot x + 10$$

Die quadratische Gleichung $x^2 - 7 \cdot x + 10 = 0$ hat also die Lösungen und .

Die Koeffizienten -7 und 10 sind eng mit den beiden Lösungen verknüpft. Hast du eine Vermutung?

Allgemein gilt:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 - x_1 \cdot x - x \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2$$

Satz von Vieta



Die Lösungen der Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ sind genau dann x_1 und x_2 , wenn gilt:

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

Mit den beiden Lösungen können wir die Zerlegung in Linearfaktoren ermitteln:

$$x^2 + p \cdot x + q = \underbrace{(x - x_1)}_{\text{Linearfaktor}} \cdot \underbrace{(x - x_2)}_{\text{Linearfaktor}}$$

Teiler von q



Wenn die quadratische Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ **ganzzahlige** Koeffizienten p und q und ganzzahlige Lösungen x_1 und x_2 hat, dann können wir diese durch Probieren schnell ermitteln:

Die quadratische Gleichung $x^2 - 2 \cdot x - 15 = 0$ hat zum Beispiel zwei ganzzahlige Lösungen x_1 und x_2 .

- i) Aus dem Satz von Vieta folgt $x_1 + x_2 = 2$ und $x_1 \cdot x_2 = -15$.
- ii) Die beiden ganzzahligen Lösungen müssen also ganzzahlige **Teiler** von -15 sein: $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$
Aus den möglichen Lösungspaaren

$$1 \cdot (-15) = 3 \cdot (-5) = 5 \cdot (-3) = 15 \cdot (-1)$$

erfüllt nur eines auch die Bedingung $x_1 + x_2 = 2$. Die zwei Lösungen sind also und .

Mit den Lösungen können wir auch die Zerlegung in Linearfaktoren angeben:

$$x^2 - 2 \cdot x - 15 = \left(\text{} \right) \cdot \left(\text{} \right)$$

Teiler von q



Die gegebene quadratische Gleichung hat ganzzahlige Lösungen.

Ermittle die Zerlegung in Linearfaktoren und die Lösungen.

a) $0 = x^2 + 6 \cdot x - 7 = (x \text{ }) \cdot (x \text{ })$ hat die Lösungen und .

b) $0 = x^2 - 7 \cdot x + 10 = (x \text{ }) \cdot (x \text{ })$ hat die Lösungen und .

c) $0 = x^2 + 12 \cdot x = x \cdot (x \text{ })$ hat die Lösungen und .

d) $0 = x^2 - 16 = (x \text{ }) \cdot (x \text{ })$ hat die Lösungen und .

e) $0 = x^2 - 6 \cdot x + 9 = (x \text{ }) \cdot (x \text{ })$ hat die Lösung .

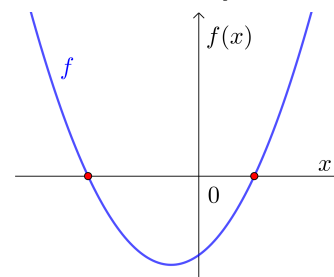


Für die rechts dargestellte quadratische Funktion f gilt:

$$f(x) = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 24$$

Die Funktion hat ganzzahlige Nullstellen.

- 1) Ermittle die Linearfaktorform von f .
- 2) Ermittle die Nullstellen von f .

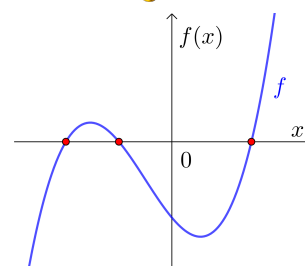


Die Gleichung

$$(x + 2) \cdot (x + 4) \cdot (x - 3) = 0$$

hat die Lösungen , und .

Multipliziere die linke Seite vollständig aus.



Rechts oben ist der Graph der Polynomfunktion f mit $f(x) = x^3 + 3 \cdot x^2 - 10 \cdot x - 24$ dargestellt. Mehr dazu findest du auf dem [Arbeitsblatt – Polynomfunktionen](#).



Wir haben die **kleine Lösungsformel** für quadratische Gleichungen hergeleitet. Daraus folgt: Wenn $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$ gilt, dann sind die reellen Zahlen x_1 und x_2 mit $x_1 \leq x_2$ genau dann Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$, wenn

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D}$$

gilt. Rechne nach, dass $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$ gilt.

Sind umgekehrt x_1 und x_2 zwei Zahlen mit $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$, dann gilt:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = x^2 + p \cdot x + q$$

Aus dem Produkt-Null-Satz folgt, dass x_1 und x_2 Lösungen von $x^2 + p \cdot x + q = 0$ sind.

