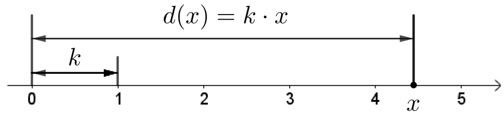
Lineare Skala

Der rechts dargestellte Zahlenstrahl startet bei der Zahl **0**.
Miss die Entfernung der Zahl 1 von der Zahl 0 ab:



$k = \square$ mm

Diese Zahl k nennen wir **Skalierungsfaktor**.

Auf dieser Skala hat die Zahl $x \geq 0$ den Abstand $\boldsymbol{d(x) = k \cdot x}$ von der Zahl 0.

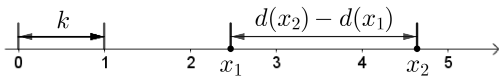
Es gilt zum Beispiel:

a) $d(0) = k \cdot 0 = \square$ mm **b)** $d(1) = k \cdot 1 = \square$ mm **c)** $d(2) = k \cdot 2 = \square$ mm

Es ist d eine lineare Funktion. Wir sprechen deshalb auch von einer **linearen Skala**.

Lineare Skala

Eine lineare Skala mit Skalierungsfaktor k ist unten dargestellt.
Wie berechnet man den Abstand zweier Zahlen $x_1 < x_2$ auf dieser Skala?



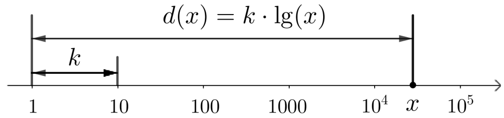
Wir stellen eine Formel für diesen Abstand auf:

$$\boldsymbol{d(x_2) - d(x_1)} = k \cdot x_2 - k \cdot x_1 = \boldsymbol{k \cdot (x_2 - x_1)}$$

Auf einer *linearen* Skala ist also zum Beispiel der Abstand zwischen 2 und 6 gleich groß wie der Abstand zwischen 5 und 9, weil $6 - 2 = 9 - 5 = 4$.

Logarithmische Skala

Der rechts dargestellte Zahlenstrahl startet bei der Zahl **1**.
Miss die Entfernung der Zahl 10 von der Zahl 1 ab:



$k = \square$ mm

Auf dieser Skala hat die Zahl $x \geq 1$ den Abstand $\boldsymbol{d(x) = k \cdot \log_{10}(x) = k \cdot \lg(x)}$ von der Zahl 1.

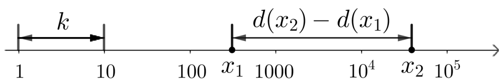
Es gilt zum Beispiel:

a) $d(1) = k \cdot \underbrace{\lg(1)}_{=0} = \square$ mm **b)** $d(10) = k \cdot \underbrace{\lg(10)}_{=1} = \square$ mm **c)** $d(100) = k \cdot \underbrace{\lg(100)}_{=2} = \square$ mm

Es ist d eine Logarithmusfunktion. Wir sprechen deshalb auch von einer **logarithmischen Skala**.

Logarithmische Skala

Eine logarithmische Skala mit Skalierungsfaktor k ist unten dargestellt.
Wie berechnet man den Abstand zweier Zahlen $x_1 < x_2$ auf dieser Skala?



Wir stellen mit den Rechenregeln für Logarithmen eine Formel für diesen Abstand auf:

$$\boldsymbol{d(x_2) - d(x_1)} = k \cdot \lg(x_2) - k \cdot \lg(x_1) =$$
$$= k \cdot [\lg(x_2) - \lg(x_1)] = \boldsymbol{k \cdot \lg\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$$

Auf einer *logarithmischen* Skala ist also zum Beispiel der Abstand zwischen 2 und 6 gleich groß wie der Abstand zwischen 5 und 15, weil $\frac{6}{2} = \frac{15}{5} = 3$.

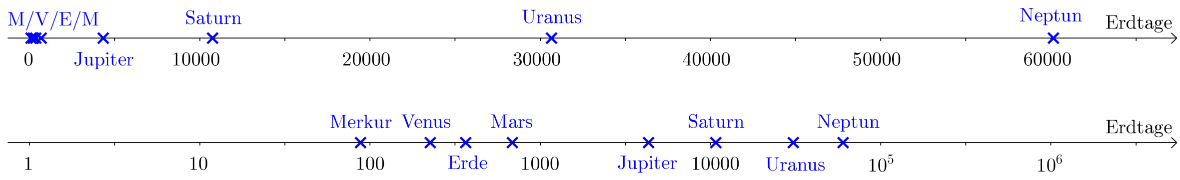
Lineare Skalierung vs. Logarithmische Skalierung MmF

Die folgende Tabelle enthält gerundete Umlaufzeiten der Planeten um die Sonne (in Erdtagen):

Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun
88	226	365	686	4329	10 753	30 664	60 148

Quelle: Cranial Creations in Physical Science: Interdisciplinary and Cooperative Activities

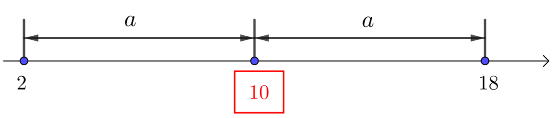
Unten sind diese Werte auf einer linearen Skala und auf einer logarithmischen Skala eingetragen:



Warum ist hier die logarithmische Skala besser geeignet? Es gibt „große" und „kleine" Werte.

Mittelpunkt MmF

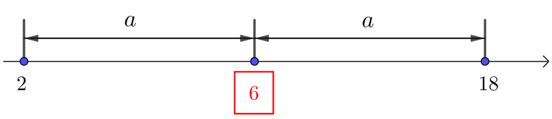
Welcher Wert liegt bei einer *linearen* Skala genau in der Mitte zwischen 2 und 18 ?



$2 + x + x = 18 \iff x = 8$

$2 + 8 = 10$

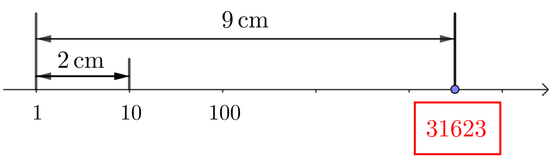
Welcher Wert liegt bei einer *logarithmischen* Skala genau in der Mitte zwischen 2 und 18 ?



$2 \cdot x \cdot x = 18 \overset{x>0}{\iff} x = 3$

$2 \cdot 3 = 6$

Berechne die markierte Zahl auf der logarithmischen Skala. Runde auf die nächste ganze Zahl.

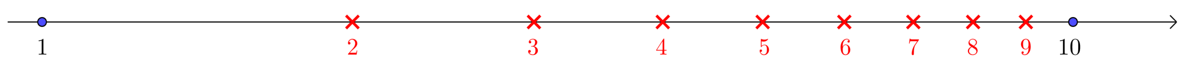


$d(x) = 2 \cdot \lg(x)$

$d(x) = 9 \iff \lg(x) = 4{,}5 \iff x = 10^{4,5} \approx 31\,623$

2, 3, 4, . . . , 9 MmF

Auf jeder linearen Skala sind 1 und 2 gleich weit voneinander entfernt wie 2 und 3.
Diese Eigenschaft haben logarithmische Skalen *nicht*:



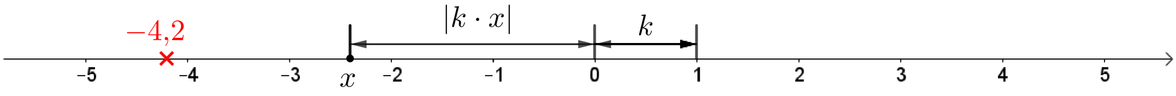
1) Miss den Skalierungsfaktor oben ab: $k =$ ☐ cm

2) Berechne mit diesem Skalierungsfaktor jeweils den Abstand von 1 auf der Skala.
Trage die Ergebnisse in der Tabelle ein, und markiere die Ergebnisse in der Skala oben.

2	3	4	5	6	7	8	9
$k \cdot \lg(2)$	$k \cdot \lg(3)$	$k \cdot \lg(4)$	$k \cdot \lg(5)$	$k \cdot \lg(6)$	$k \cdot \lg(7)$	$k \cdot \lg(8)$	$k \cdot \lg(9)$

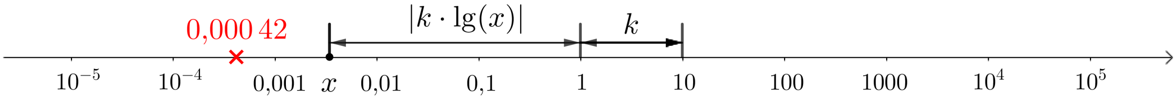
Verlängerung nach links

Wir verlängern die unten dargestellte *lineare* Skala mit Skalierungsfaktor $k =$ ☐ mm nach links über den Startwert 0 hinaus:



Die Zahl $x < 0$ liegt um $|d(x)| = |k \cdot x|$ links vom Startwert 0.
Trage die Zahl $-4{,}2$ auf der linearen Skala oben ein.

Wir verlängern die unten dargestellte *logarithmische* Skala mit Skalierungsfaktor $k =$ ☐ mm nach links über den Startwert 1 hinaus:



Die Zahl $0 < x < 1$ liegt um $|d(x)| = |k \cdot \lg(x)|$ links vom Startwert 1.
Trage die Zahl 0,000 42 auf der logarithmischen Skala oben ein.

Beachte, dass $\lg(x)$ nur für $x > 0$ definiert ist. Wir können also keine negativen Zahlen auf dieser logarithmischen Skala eintragen.

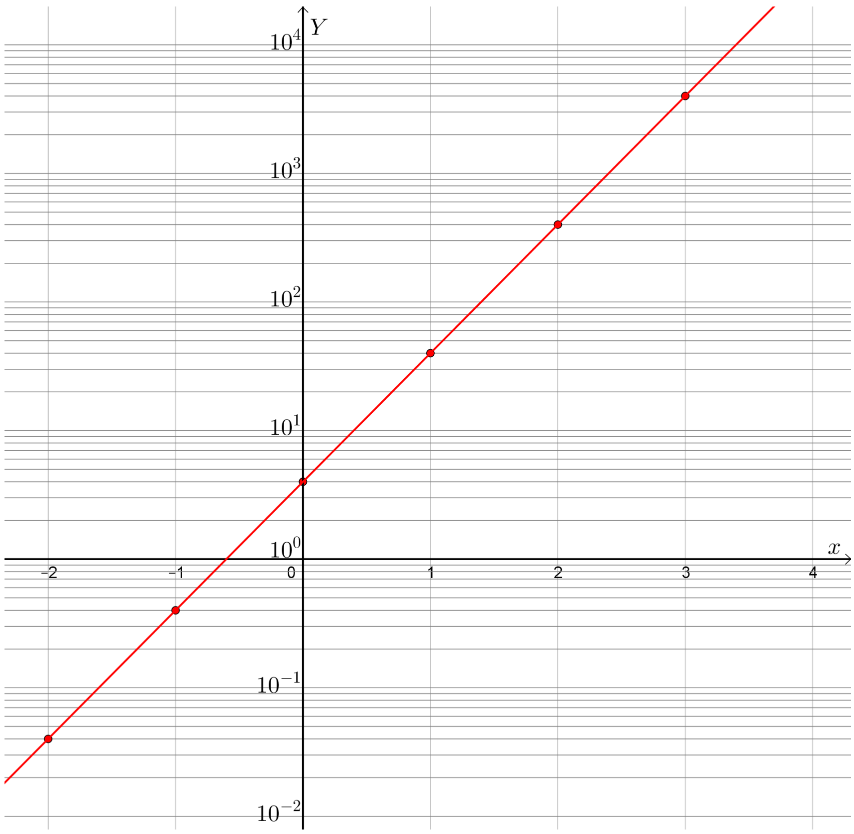
Ordinatenlogarithmisches Koordinatensystem

In einem **ordinatenlogarithmischen Koordinatensystem** ist die waagrechte Achse linear skaliert und die senkrechte Achse („Ordinatenachse") logarithmisch skaliert.
Der Schnittpunkt der beiden Koordinatenachsen ist also der Punkt $(0 \mid 1)$.

Zeichne den Graphen der Exponentialfunktion $y(x) = 4 \cdot 10^x$ in dieses Koordinatensystem ein.

Fülle dazu die Wertetabelle aus, und zeichne die Punkte rechts ein.

x	$y(x)$
0	4
1	40
2	400
3	4000
-1	0,4
-2	0,04



Was fällt dir auf?

Die Punkte liegen auf einer Gerade.

Ordinatenlogarithmisches Koordinatensystem

Der Graph jeder Exponentialfunktion

$$y(x) = c \cdot a^x$$

ist in einem ordinatenlogarithmischen Koordinatensystem eine Gerade.

Wir rechnen diese Eigenschaft für die Exponentialfunktion $y(x) = 4 \cdot 10^x$ nach.
Dazu logarithmieren wir beide Seiten der Funktionsgleichung.
Zerlege die rechte Seite mit den Rechenregeln für Logarithmen so weit wie möglich:

$$\lg(y(x)) = \lg(4 \cdot 10^x) = \lg(4) + x \cdot \lg(10)$$

In einem ordinatenlogarithmischen Koordinatensystem mit Skalierungsfaktoren 1 ist der Graph dieser Exponentialfunktion also eine Gerade mit Steigung $k = \lg(10)$ und Ordinatenabschnitt $d = \lg(4)$.

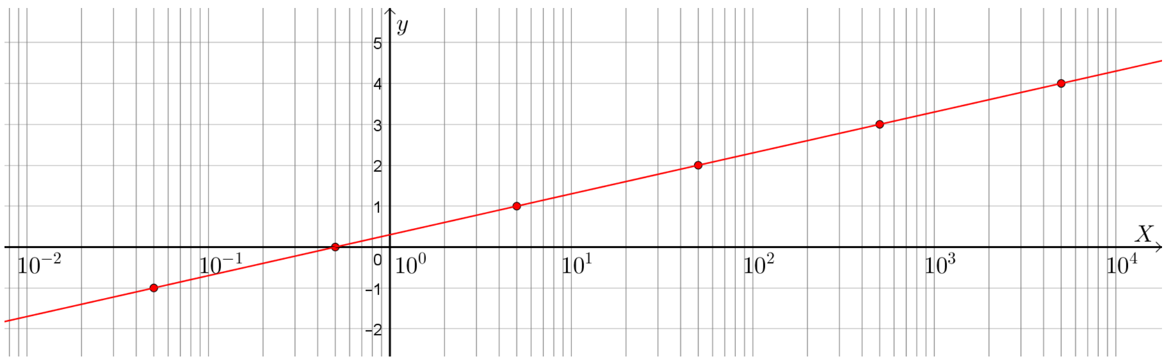
Abszissenlogarithmisches Koordinatensystem

In einem **abszissenlogarithmischen Koordinatensystem** ist die senkrechte Achse linear skaliert und die waagrechte Achse („Abszissenachse“) logarithmisch skaliert.
Der Schnittpunkt der beiden Koordinatenachsen ist also der Punkt $(1 \mid 0)$.

Zeichne den Graphen der Logarithmusfunktion $y(x) = \lg(2 \cdot x)$ in dieses Koordinatensystem unten ein.

Fülle dazu die Wertetabelle aus, und zeichne die Punkte unten ein.

x	5	50	500	5000	0,5	0,05
$y(x)$	1	2	3	4	0	-1



Abszissenlogarithmisches Koordinatensystem

Der Graph jeder Logarithmusfunktion

$$y(x) = \log_a(c \cdot x)$$

ist in einem abszissenlogarithmischen Koordinatensystem eine Gerade.

Wir rechnen diese Eigenschaft für die Logarithmusfunktion $y(x) = \lg(2 \cdot x)$ nach.
Zerlege die rechte Seite mit den Rechenregeln für Logarithmen so weit wie möglich:

$$y(x) = \lg(2 \cdot x) = \lg(2) + \lg(x)$$

In einem abszissenlogarithmischen Koordinatensystem mit Skalierungsfaktoren 1 ist der Graph dieser Logarithmusfunktion also eine Gerade mit Steigung $k = 1$ und Ordinatenabschnitt $d = \lg(2)$.

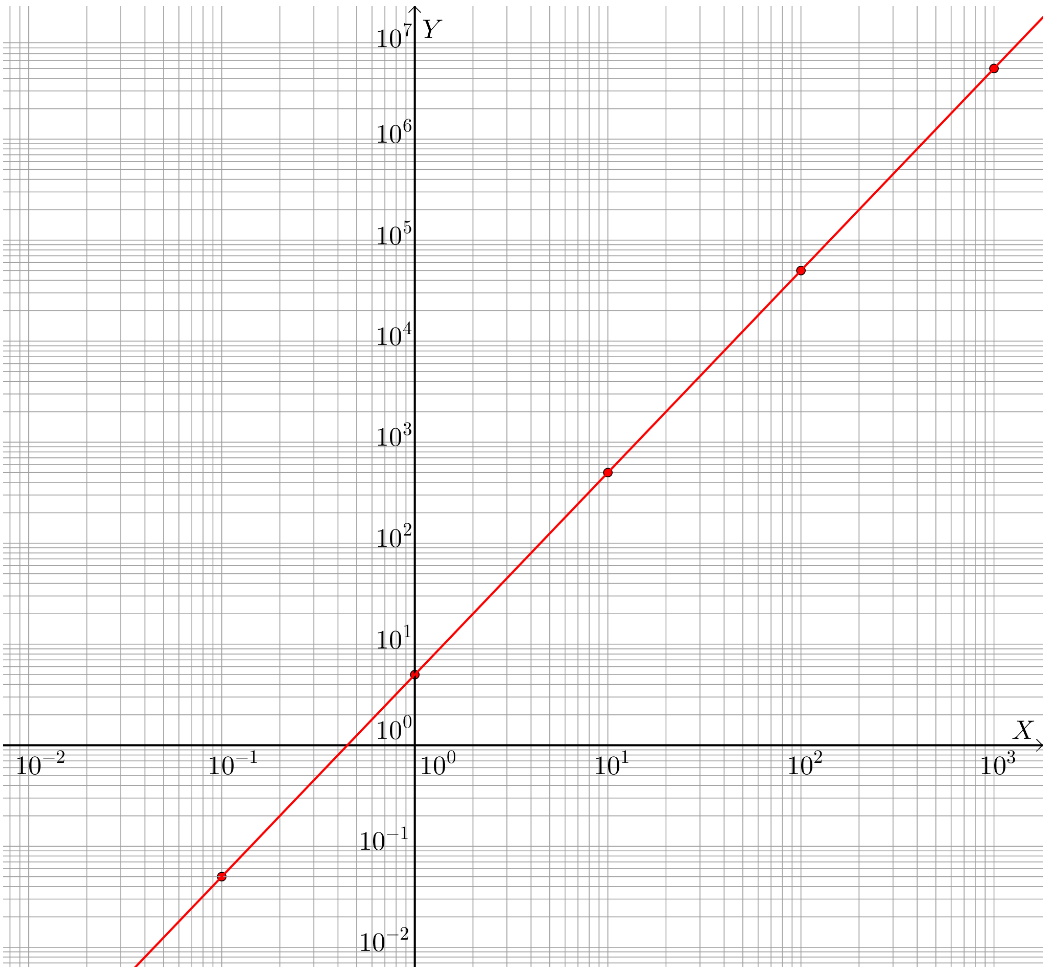
Doppeltlogarithmisches Koordinatensystem

In einem **doppeltlogarithmischen Koordinatensystem** sind beide Achsen logarithmisch skaliert. Der Schnittpunkt der beiden Koordinatenachsen ist also der Punkt $(1 \mid 1)$.

Zeichne den Graphen der Potenzfunktion $y(x) = 5 \cdot x^2$ in dieses Koordinatensystem unten ein.

Fülle dazu die Wertetabelle aus, und zeichne die Punkte unten ein.

x	1	10	10^2	10^3	10^{-1}
$y(x)$	5	500	$5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^{-2}$



Doppeltlogarithmisches Koordinatensystem

Der Graph jeder Potenzfunktion

$$y(x) = a \cdot x^m$$

ist in einem doppeltlogarithmischen Koordinatensystem eine Gerade.

Wir rechnen diese Eigenschaft für die Potenzfunktion $y(x) = 5 \cdot x^2$ nach.
Dazu logarithmieren wir beide Seiten der Funktionsgleichung.
Zerlege die rechte Seite mit den Rechenregeln für Logarithmen so weit wie möglich:

$$\lg(y(x)) = \lg(5 \cdot x^2) = \lg(5) + 2 \cdot \lg(x)$$

In einem doppeltlogarithmischen Koordinatensystem mit Skalierungsfaktoren 1 ist der Graph dieser Potenzfunktion also eine Gerade mit Steigung $k = 2$ und Ordinatenabschnitt $d = \lg(5)$.