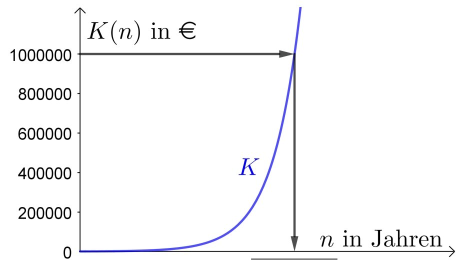
Lösung einer Exponentialgleichung ertasten

Ein Kapital von 500 € wächst jährlich um 2 %.
Für das Kapital $K(n)$ nach n Jahren gilt also:

$$K(n) = 500 \cdot 1{,}02^n$$

Wie viele Jahre würde es dauern, bis das Kapital auf 1 Million € anwächst? Taste dich mit dem Taschenrechner heran.

Trage deinen Näherungswert in das Kästchen rechts ein.



$\boxed{\approx 384}$

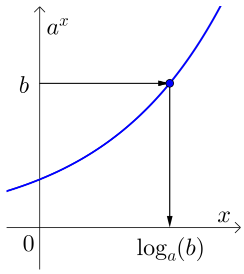
Logarithmus

Rechts siehst du den Graphen der Exponentialfunktion mit $x \mapsto a^x$.

Da jede Exponentialfunktion entweder streng monoton steigend oder fallend ist, hat die Gleichung $a^x = b$ für alle $b > 0$ eine *eindeutige* Lösung x.

Diese Lösung heißt **Logarithmus von b zur Basis a**:

$$a^x = b \iff x = \log_a(b) \qquad \text{mit } a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$$



Logarithmen händisch berechnen

Wenn wir $\log_a(b)$ berechnen, denken wir also: „*a hoch welche Zahl ergibt b?*“ $a^? = b$

a) $\log_{10}(1000) = 3$, weil $10^3 = 1000$.

b) $\log_7(49) = 2$, weil $7^2 = 49$.

c) $\log_2(16) = 4$, weil $2^4 = 16$.

d) $\log_2(0{,}5) = -1$, weil $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = 0{,}5$.

e) $\log_{11}(\sqrt{11}) = \frac{1}{2}$, weil $11^{\frac{1}{2}} = \sqrt{11}$.

f) $\log_{42}(42^2) = 2$, weil $e^2 = e^2$.

g) $\log_b(b) = 1$, weil $b^1 = b$.

h) $\log_b(1) = 0$, weil $b^0 = 1$.

Logarithmus am Taschenrechner

Die Basis 10 und die Basis e kommen so oft vor, dass dein Taschenrechner eigene Tasten dafür hat:

Zehnerlogarithmus (Basis 10) $\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{LOG}}$
Kurzschreibweise: $\mathbf{\log_{10}(b) = \lg(b)}$

Natürlicher Logarithmus (Basis e) $\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{LN}}$
Kurzschreibweise: $\mathbf{\log_e(b) = \ln(b)}$

Du kannst auch Logarithmen mit jeder anderen Basis a ($a > 0$, $a \neq 1$) auf deinem Taschenrechner ermitteln. Es gilt nämlich: $\mathbf{\log_a(b) = \frac{\lg(b)}{\lg(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}}$

Eine Begründung dafür findest du auf der letzten Seite.

Lösung einer Exponentialgleichung berechnen

Löse die Gleichung $500 \cdot 1{,}02^n = 1\,000\,000$.

$$1{,}02^n = 2000 \iff n = \log_{1{,}02}(2000) = \frac{\lg(2000)}{\lg(1{,}02)} = 383{,}83\ldots$$

Rechenregeln für Logarithmen

Die folgenden **Rechenregeln für Logarithmen** gelten für alle $x, y > 0$: Begründungen auf letzter Seite

i) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ Aus „mal“ wird beim Aufteilen „plus“.

ii) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ Aus „durch“ wird beim Aufteilen „minus“.

iii) $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$ Aus „hoch r“ wird beim Aufteilen „mal r“.

⚠ Im Allgemeinen gilt: $\log_a(x+y) \neq \log_a(x) + \log_a(y)$ bzw. $\log_a(x-y) \neq \log_a(x) - \log_a(y)$

Logarithmen zerlegen

Zerlege den Term so weit wie möglich.

a) $\ln\left(\frac{5 \cdot x^2}{y \cdot z}\right) = \ln\left(5 \cdot x^2\right) - \ln\left(y \cdot z\right) = \ln(5) + 2 \cdot \ln(x) - \ln(y) - \ln(z)$

b) $\lg\left(\frac{(42 \cdot x^2 + 1)^{10}}{y^5 - 3}\right) = 10 \cdot \lg(42 \cdot x^2 + 1) - \lg(y^5 - 3)$

Alternativer Lösungsweg

Löse die Gleichung $500 \cdot 1{,}02^n = 1\,000\,000$ mithilfe von Rechenregel **iii)**.

$$1{,}02^n = 2000 \iff \lg\left(1{,}02^n\right) = \lg(2000) \iff n \cdot \lg(1{,}02) = \lg(2000) \iff n = 383{,}83...$$

Exponentialgleichungen lösen

Löse die Gleichung $7 \cdot 2^{3 \cdot x - 1} - 350 = 0$.

$$\begin{aligned} 7 \cdot 2^{3 \cdot x - 1} &= 350 \\ 2^{3 \cdot x - 1} &= 50 \\ \lg\left(2^{3 \cdot x - 1}\right) &= \lg(50) \\ (3 \cdot x - 1) \cdot \lg(2) &= \lg(50) \\ 3 \cdot x - 1 &= \frac{\lg(50)}{\lg(2)} \\ x &= \frac{\frac{\lg(50)}{\lg(2)} + 1}{3} = 2{,}214... \end{aligned}$$

Wenn x nur im Exponenten einer Potenz vorkommt, dann ...

i) ... forme nach dieser Potenz um.

ii) ... logarithmiere beide Seiten der Gleichung.

iii) ... forme nach x um.

Verdopplungszeit

Der Wert eines Sparbuchs mit 300 € Kapital wächst pro Jahr effektiv um 0,8 %.

1) $K(n)$ ist der Wert des Sparbuchs nach n Jahren. Stelle eine Funktionsgleichung auf.

$$K(n) = 300 \cdot 1{,}008^n$$

2) Berechne die **Verdopplungszeit**. Das ist jene Zeitdauer, nach der sich der Wert des Sparbuchs verdoppelt hat.

$$K(n) = 2 \cdot K(0) \iff 300 \cdot 1{,}008^n = 600 \iff 1{,}008^n = 2 \iff$$

$$\iff n \cdot \lg(1{,}008) = \lg(2) \iff n = \frac{\lg(2)}{\lg(1{,}008)} = 86{,}98... \text{ Jahre}$$

Halbwertszeit

Das im Jahr 1986 in Tschernobyl freigesetzte Cäsium-137 zerfällt annähernd nach folgendem Gesetz:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}023\,043 \cdot t}$$

$t\ldots$ Zeit in Jahren ($t = 0$ ist das Jahr 1986.)
$N(t)\ldots$ vorhandene Menge Cäsium-137 zum Zeitpunkt t
$N_0\ldots$ freigesetzte Menge Cäsium-137 im Jahr 1986

Berechne die **Halbwertszeit**. Das ist jene Zeitdauer, nach der sich die vorhandene Menge Cäsium-137 halbiert hat.

$$N(t) = \frac{1}{2} \cdot N(0) \iff N_0 \cdot e^{-0{,}023\,043 \cdot t} = 0{,}5 \cdot N_0 \iff e^{-0{,}023\,043 \cdot t} = 0{,}5 \iff$$

$$\iff -0{,}023\,043 \cdot t \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1} = \ln(0{,}5) \iff t = \frac{\ln(0{,}5)}{-0{,}023\,043} = 30{,}08\ldots \text{ Jahre}$$

Umkehrfunktionen

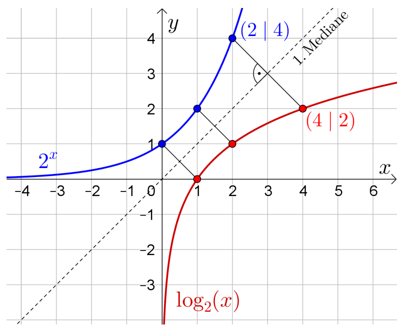
Die Logarithmusfunktion g mit

$$\boldsymbol{g(x) = \log_a(x)}$$

ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion f mit

$$\boldsymbol{f(x) = a^x} \quad \text{mit } a > 0,\ a \neq 1.$$

Die Graphen von f und g sind also an der 1. Mediane gespiegelt.



Für jeden Punkt $(x \mid a^x)$ am Graphen von f liegt der gespiegelte Punkt $(a^x \mid x)$ am Graphen von g.

Rechts oben ist der Graph der Exponentialfunktion mit $x \mapsto 2^x$ dargestellt. $g(a^x) = \log_a(a^x) = x$ ✓
Skizziere rechts oben den Graphen der Logarithmusfunktion mit $x \mapsto \log_2(x)$.

Der Graph jeder Exponentialfunktion mit $x \mapsto a^x$ verläuft durch den Punkt $(0 \mid 1)$.
Also verläuft der Graph jeder Logarithmusfunktion mit $x \mapsto \log_a(x)$ durch den Punkt $(1 \mid 0)$.

Da $a^x = -1$ *keine* Lösung in $\mathbb{R}$ hat, ist $\log_a(-1)$ *keine* reelle Zahl. Es gilt $a^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Allgemein ist $\log_a(x)$ deshalb über der Grundmenge $\mathbb{R}$ nur für $x > 0$ definiert.

Tatsächlich kann man Potenzen auch für Exponenten definieren, die komplexe Zahlen sind. Dann gilt: $e^{i \cdot \pi} = -1$

Logarithmen aufheben

Aus der Definition des Logarithmus

$$a^x = b \iff x = \log_a(b) \qquad a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$$

folgt: $\boldsymbol{a^{\log_a(b)} = b}$ „a hoch" und „Logarithmus zur Basis a" heben einander auf.

Das hilft, wenn bei einer Gleichung die gesuchte Variable im Argument eines Logarithmus vorkommt:

$$\lg(x) = 42 \iff \log_{10}(x) = 42 \iff 10^{\log_{10}(x)} = 10^{42} \iff x = 10^{42}$$

$$\ln(x) = 42 \iff \log_e(x) = 42 \iff e^{\log_e(x)} = e^{42} \iff x = e^{42}$$

Logarithmusgleichungen lösen

Löse die Gleichung $\dfrac{\ln(5-42\cdot x)}{3}-2=0$.

$$\frac{\ln(5-42\cdot x)}{3}=2$$
$$\ln(5-42\cdot x)=6$$
$$5-42\cdot x=e^6$$
$$x=\frac{5-e^6}{42}=-9{,}486...$$

Wenn x nur in einem Logarithmus $\log_a(☺)$ vorkommt, dann …

i) … forme nach diesem Logarithmus um.

ii) … rechne „a hoch“ auf beiden Seiten der Gleichung.

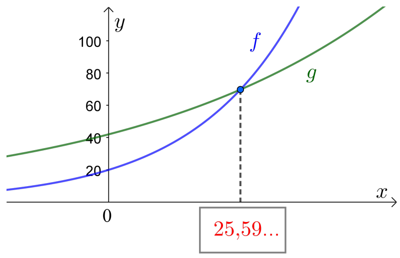
iii) … forme nach x um.

Schnittstelle

Rechts sind die Graphen der Exponentialfunktionen f und g mit

$$f(x)=20\cdot 1{,}05^x \quad \text{und} \quad g(x)=42\cdot 1{,}02^x$$

dargestellt. Berechne die Schnittstelle.



$$f(x)=g(x) \iff 20\cdot 1{,}05^x=42\cdot 1{,}02^x$$

Lösungsweg 1:

$$\frac{1{,}05^x}{1{,}02^x}=\frac{42}{20}$$
$$\left(\frac{1{,}05}{1{,}02}\right)^x=2{,}1$$
$$x\cdot\lg\left(\frac{1{,}05}{1{,}02}\right)=\lg(2{,}1)$$
$$x=\frac{\lg(2{,}1)}{\lg\left(\frac{1{,}05}{1{,}02}\right)}=25{,}59...$$

Lösungsweg 2:

$$\lg(20)+x\cdot\lg(1{,}05)=\lg(42)+x\cdot\lg(1{,}02)$$
$$x\cdot\lg(1{,}05)-x\cdot\lg(1{,}02)=\lg(42)-\lg(20)$$
$$x\cdot[\lg(1{,}05)-\lg(1{,}02)]=\lg(42)-\lg(20)$$
$$x=\frac{\lg(42)-\lg(20)}{\lg(1{,}05)-\lg(1{,}02)}=25{,}59...$$

Begründungen der Rechenregeln

Die Rechenregeln für Logarithmen folgen aus den Rechenregeln für Potenzen:

1) $a^{\log_a(x)+\log_a(y)}=a^{\log_a(x)}\cdot a^{\log_a(y)}=x\cdot y$ Also gilt: $\log_a(x\cdot y)=\log_a(x)+\log_a(y)$

2) $a^{\log_a(x)-\log_a(y)}=\dfrac{a^{\log_a(x)}}{a^{\log_a(y)}}=\dfrac{x}{y}$ Also gilt: $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$

3) $a^{r\cdot\log_a(x)}=\left(a^{\log_a(x)}\right)^r=x^r$ Also gilt: $\log_a(x^r)=r\cdot\log_a(x)$

Die Umrechnungsregel $\log_a(b)=\dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$ folgt dann aus den Rechenregeln für Logarithmen:

$$a^x=b \iff \ln(a^x)=\ln(b) \overset{3)}{\iff} x\cdot\ln(a)=\ln(b) \iff x=\frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

Also gilt: $a^{\frac{\ln(b)}{\ln(a)}}=b$ bzw. $\log_a(b)=\dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$