

Lösung einer Exponentialgleichung ertasten

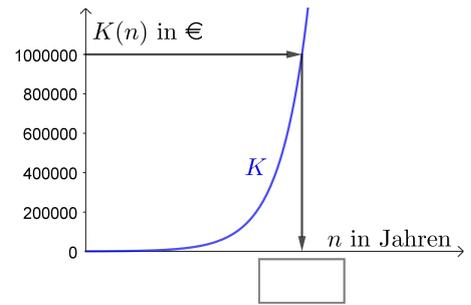


Ein Kapital von 500 € wächst jährlich um 2%.
Für das Kapital $K(n)$ nach n Jahren gilt also:

$$K(n) = \boxed{}$$

Wie viele Jahre würde es dauern, bis das Kapital auf 1 Million € anwächst? Taste dich mit dem Taschenrechner heran.

Trage deinen Näherungswert in das Kästchen rechts ein.



Logarithmus

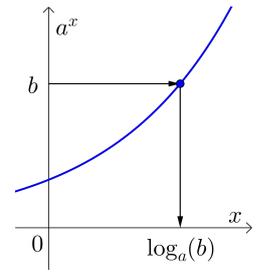


Rechts siehst du den Graphen der Exponentialfunktion mit $x \mapsto a^x$.

Da jede Exponentialfunktion entweder **streng monoton steigend** oder fallend ist, hat die Gleichung $a^x = b$ für alle $b > 0$ eine **eindeutige** Lösung x .

Diese Lösung heißt **Logarithmus von b zur Basis a** :

$$a^x = b \iff x = \log_a(b) \quad \text{mit } a > 0, a \neq 1, b > 0$$



Logarithmen händisch berechnen



Wenn wir $\log_a(b)$ berechnen, denken wir also: „*a hoch welche Zahl ergibt b?*“

$$a^? = b$$

a) $\log_{10}(1000) = \boxed{}$, weil $10^{\boxed{}} = 1000$.

e) $\log_{11}(\sqrt{11}) = \boxed{}$, weil $\boxed{}$.

b) $\log_7(49) = \boxed{}$, weil $\boxed{}$.

f) $\log_{42}(42^2) = \boxed{}$, weil $\boxed{}$.

c) $\log_2(16) = \boxed{}$, weil $\boxed{}$.

g) $\log_b(b) = \boxed{}$, weil $\boxed{}$.

d) $\log_2(0,5) = \boxed{}$, weil $\boxed{}$.

h) $\log_b(1) = \boxed{}$, weil $\boxed{}$.

Logarithmus am Taschenrechner



Die Basis 10 und die Basis e kommen so oft vor, dass dein Taschenrechner eigene Tasten dafür hat:

Zehnerlogarithmus (Basis 10) \rightsquigarrow **LOG**

Natürlicher Logarithmus (Basis e) \rightsquigarrow **LN**

Kurzschreibweise: $\log_{10}(b) = \lg(b)$

Kurzschreibweise: $\log_e(b) = \ln(b)$

Du kannst auch Logarithmen mit jeder anderen Basis a ($a > 0, a \neq 1$) auf deinem Taschenrechner ermitteln. Es gilt nämlich:

$$\log_a(b) = \frac{\lg(b)}{\lg(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

Eine Begründung dafür findest du auf der [letzten Seite](#).

Lösung einer Exponentialgleichung berechnen



Löse die Gleichung $500 \cdot 1,02^n = 1\,000\,000$.

Rechenregeln für Logarithmen



Die folgenden **Rechenregeln für Logarithmen** gelten für alle $x, y > 0$: Begründungen auf [letzter Seite](#)

i) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ Aus „mal“ wird beim Aufteilen „plus“.

ii) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ Aus „durch“ wird beim Aufteilen „minus“.

iii) $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$ Aus „hoch r “ wird beim Aufteilen „mal r “.

⚠ Im Allgemeinen gilt: $\log_a(x + y) \neq \log_a(x) + \log_a(y)$ bzw. $\log_a(x - y) \neq \log_a(x) - \log_a(y)$

Logarithmen zerlegen



Zerlege den Term so weit wie möglich.

a) $\ln\left(\frac{5 \cdot x^2}{y \cdot z}\right) =$

b) $\lg\left(\frac{(42 \cdot x^2 + 1)^{10}}{y^5 - 3}\right) =$

Alternativer Lösungsweg



Löse die Gleichung $500 \cdot 1,02^n = 1\,000\,000$ mithilfe von Rechenregel **iii**).

Exponentialgleichungen lösen



Löse die Gleichung $7 \cdot 2^{3x-1} - 350 = 0$.

Wenn x nur im Exponenten einer Potenz vorkommt, dann ...

- i) ... forme nach dieser Potenz um.
- ii) ... logarithmiere beide Seiten der Gleichung.
- iii) ... forme nach x um.

Verdopplungszeit



Der Wert eines Sparbuchs mit 300 € Kapital wächst pro Jahr **effektiv** um 0,8%.

1) $K(n)$ ist der Wert des Sparbuchs nach n Jahren. Stelle eine Funktionsgleichung auf.

$K(n) =$

2) Berechne die **Verdopplungszeit**. Das ist jene Zeitdauer, nach der sich der Wert des Sparbuchs verdoppelt hat.

Das im Jahr 1986 in Tschernobyl freigesetzte Cäsium-137 zerfällt annähernd nach folgendem Gesetz:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-0,023043 \cdot t}$$

t ... Zeit in Jahren ($t = 0$ ist das Jahr 1986.)

$N(t)$... vorhandene Menge Cäsium-137 zum Zeitpunkt t

N_0 ... freigesetzte Menge Cäsium-137 im Jahr 1986

Berechne die **Halbwertszeit**. Das ist jene Zeitdauer, nach der sich die vorhandene Menge Cäsium-137 halbiert hat.

Umkehrfunktionen 

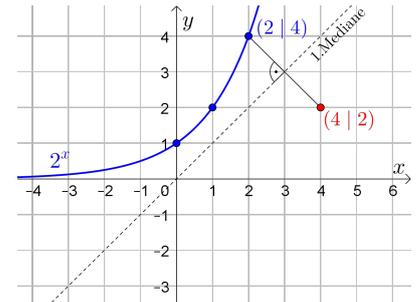
Die Logarithmusfunktion g mit

$$g(x) = \log_a(x)$$

ist die **Umkehrfunktion** der Exponentialfunktion f mit

$$f(x) = a^x \quad \text{mit } a > 0, a \neq 1.$$

Die Graphen von f und g sind also an der 1. Mediane gespiegelt.



Für jeden Punkt $(x | a^x)$ am Graphen von f liegt der gespiegelte Punkt $(a^x | x)$ am Graphen von g .

Rechts oben ist der Graph der Exponentialfunktion mit $x \mapsto 2^x$ dargestellt. $g(a^x) = \log_a(a^x) = x \checkmark$

Skizziere rechts oben den Graphen der Logarithmusfunktion mit $x \mapsto \log_2(x)$.

Der Graph jeder Exponentialfunktion mit $x \mapsto a^x$ verläuft durch den Punkt $(0 | \square)$.

Also verläuft der Graph jeder Logarithmusfunktion mit $x \mapsto \log_a(x)$ durch den Punkt $(\square | 0)$.

Da $a^x = -1$ keine Lösung in \mathbb{R} hat, ist $\log_a(-1)$ keine reelle Zahl. Es gilt $a^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Allgemein ist $\log_a(x)$ deshalb über der Grundmenge \mathbb{R} nur für $x > 0$ definiert.

Tatsächlich kann man Potenzen auch für Exponenten definieren, die komplexe Zahlen sind. Dann gilt: $e^{i \cdot \pi} = -1$

Logarithmen aufheben 

Aus der Definition des Logarithmus

$$a^x = b \iff x = \log_a(b) \quad a > 0, a \neq 1, b > 0$$

folgt: $a^{\log_a(b)} = \square$ „a hoch“ und „Logarithmus zur Basis a“ heben einander auf.

Das hilft, wenn bei einer Gleichung die gesuchte Variable im Argument eines Logarithmus vorkommt:

$$\begin{aligned} \lg(x) = 42 &\iff \log_{10}(x) = 42 &\iff 10^{\log_{10}(x)} = 10^{42} &\iff x = 10^{42} \\ \ln(x) = 42 &\iff \log_e(x) = 42 &\iff e^{\log_e(x)} = e^{42} &\iff x = e^{42} \end{aligned}$$

Löse die Gleichung $\frac{\ln(5 - 42 \cdot x)}{3} - 2 = 0$.

Wenn x nur in einem Logarithmus $\log_a(\odot)$ vorkommt, dann ...

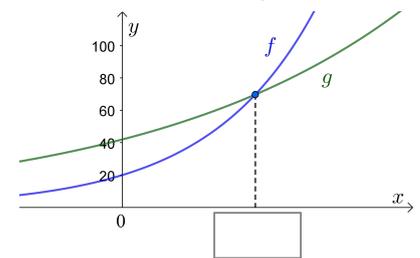
- i) ... forme nach diesem Logarithmus um.
- ii) ... rechne „a hoch“ auf beiden Seiten der Gleichung.
- iii) ... forme nach x um.

Schnittstelle 

Rechts sind die Graphen der Exponentialfunktionen f und g mit

$$f(x) = 20 \cdot 1,05^x \quad \text{und} \quad g(x) = 42 \cdot 1,02^x$$

dargestellt. Berechne die Schnittstelle.



Begründungen der Rechenregeln 

Die Rechenregeln für Logarithmen folgen aus den [Rechenregeln für Potenzen](#):

1) $a^{\log_a(x) + \log_a(y)} = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = \boxed{}$

Also gilt: $\log_a(x \cdot y) = \boxed{}$

2) $a^{\log_a(x) - \log_a(y)} = \frac{a^{\log_a(x)}}{a^{\log_a(y)}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$

Also gilt: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \boxed{}$

3) $a^{r \cdot \log_a(x)} = \left(a^{\log_a(x)}\right)^r = \boxed{}$

Also gilt: $\log_a(x^r) = \boxed{}$

Die Umrechnungsregel $\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$ folgt dann aus den Rechenregeln für Logarithmen:

$$a^x = b \iff \ln(a^x) = \ln(b) \xrightarrow{3)} x \cdot \ln(a) = \ln(b) \iff x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

Also gilt: $a^{\frac{\ln(b)}{\ln(a)}} = \boxed{}$ bzw. $\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$

