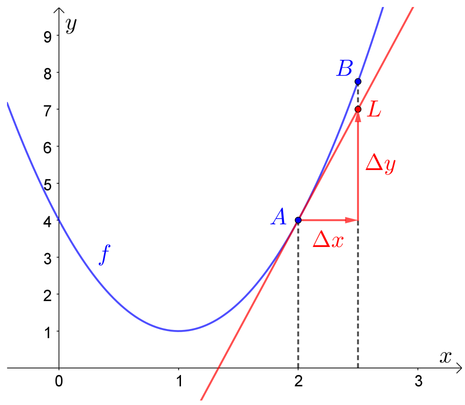
Lokale Änderungsrate – Quadratische Funktion

Der Graph der quadratischen Funktion f mit

$$f(x) = 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 4$$

ist rechts dargestellt.



Der Punkt $A = (2 \mid \boxed{})$ liegt am Funktionsgraphen.

Die Tangente im Punkt A sowie ein zugehöriges Steigungsdreieck mit $\Delta x = 0{,}5$ sind eingezeichnet.

1) Berechne den Wert von Δy in diesem Steigungsdreieck. Welche Koordinaten hat der Punkt L auf der Tangente?

Es gilt: $\underbrace{f(2 + \Delta x)}_{\textbf{i)}} \approx \underbrace{f(2)}_{\textbf{ii)}} + \underbrace{f'(2) \cdot \Delta x}_{\textbf{iii)}} \qquad (\star)$

2) Veranschauliche **i)**, **ii)** und **iii)** im Bild rechts oben.

3) Um wieviel ist die rechte Seite von $(\star)$ kleiner als die linke Seite? Berechne diese Differenz.

„Absoluter Fehler“

4) Um wieviel Prozent ist die rechte Seite von $(\star)$ kleiner als die linke Seite?

„Relativer/Prozentueller Fehler“

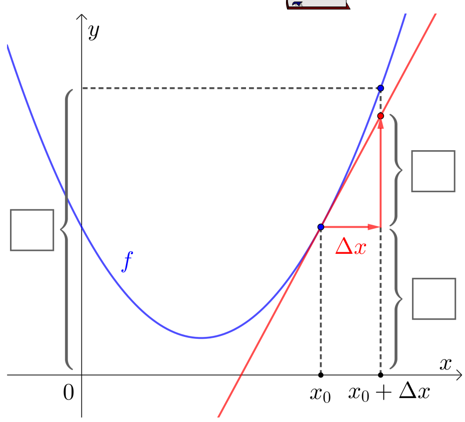
Lokale Änderungsrate

Mithilfe der **lokalen Änderungsrate $f'(x_0)$** können wir Funktionswerte von f nahe bei x_0 *näherungsweise* berechnen:

$$\underbrace{\boldsymbol{f(x_0 + \Delta x)}}_{\textbf{i)}} \approx \underbrace{\boldsymbol{f(x_0)}}_{\textbf{ii)}} + \underbrace{\boldsymbol{f'(x_0) \cdot \Delta x}}_{\textbf{iii)}}$$

In Worten: Die Funktionswerte $f(x_0)$ und $f(x_0 + \Delta x)$ liegen *ungefähr* $f'(x_0) \cdot \Delta x$ auseinander.

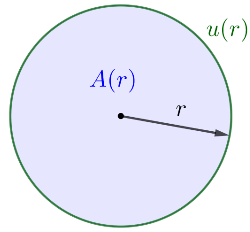
Trage **i)**, **ii)** und **iii)** rechts in die Kästchen richtig ein.



Der Satz von Taylor gibt auch an, wie weit diese Funktionswerte tatsächlich auseinander liegen.

Kreis

Der Flächeninhalt A und der Umfang u eines Kreises hängen von seinem Radius r ab:



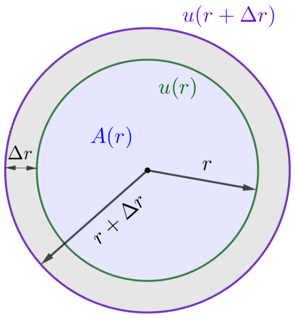
$$A(r) = \pi \cdot r^2 \quad \text{und} \quad u(r) = 2 \cdot \pi \cdot r$$

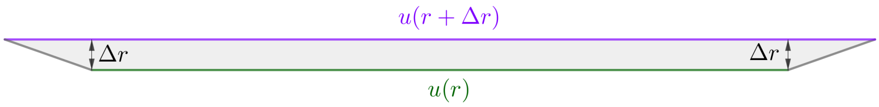
1) Für die Ableitungsfunktion von A gilt: $A'(r) = \boxed{}$
Was fällt dir auf?

Der Radius eines Kreises mit Radius $r = 4\,\text{cm}$ wird um $\Delta r = 0{,}2\,\text{cm}$ vergrößert.
Dabei gilt wie zuvor: $A(r + \Delta r) \approx A(r) + A'(r) \cdot \Delta r$

2) Um wie viel cm^2 wird der Flächeninhalt des Kreises also ungefähr größer?

Der unten dargestellte Kreisring und das Trapez haben tatsächlich den gleichen Flächeninhalt:





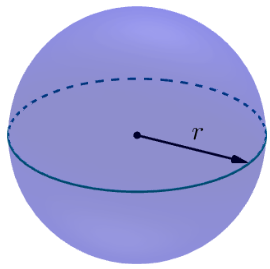
Mit größer werdendem Radius r wächst der Umfang $u(r)$ linear.

Rechne nach, dass der Kreisring und das Trapez den gleichen Flächeninhalt haben.

3) Markiere im Trapez rechts oben eine Fläche mit Inhalt $A'(r) \cdot \Delta r$.

Kugel

Das Volumen V einer Kugel hängt von ihrem Radius r ab:



$$V(r) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \qquad (r \text{ in cm, } V(r) \text{ in cm}^3)$$

Für die Ableitungsfunktion von V gilt: $V'(r) = \boxed{}$

Welche Einheit hat $V'(r)$? Welche geometrische Bedeutung hat $V'(r)$?

$\sqrt{4{,}2}$

Für die 1. Ableitung der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ gilt: $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

Schätze mithilfe von $f(4) = \sqrt{4}$ den Wert von $f(4{,}2) = \sqrt{4{,}2}$ ab.