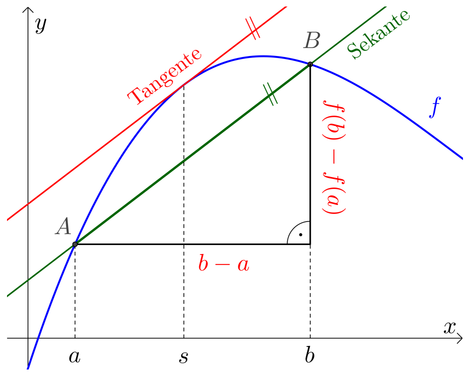
Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Wir sehen uns die Steigung einer differenzierbaren Funktion f im Intervall $[a; b]$ an.

Stelle mithilfe von f, a und b eine Formel für die Steigung der Gerade durch die Punkte $A = (a \mid f(a))$ und $B = (b \mid f(b))$ auf:



$$\text{Steigung der Sekante} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Der **Mittelwertsatz der Differentialrechnung** garantiert (mindestens) eine Stelle s im Intervall $[a; b]$ so, dass gilt:

$$\boldsymbol{f'(s) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}\,.$$

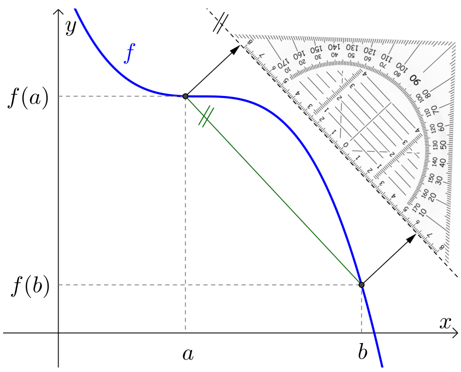
Steigung einer Tangente

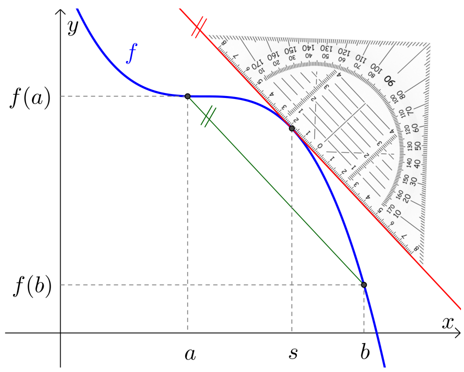
Steigung der Sekante

Die mittlere Änderungsrate von f in $[a; b]$ ist also gleich groß wie

die lokale Änderungsrate von f an einer Stelle s in $[a; b]$.

Wir können eine solche Stelle s auch grafisch ermitteln, indem wir die Sekante parallel verschieben:



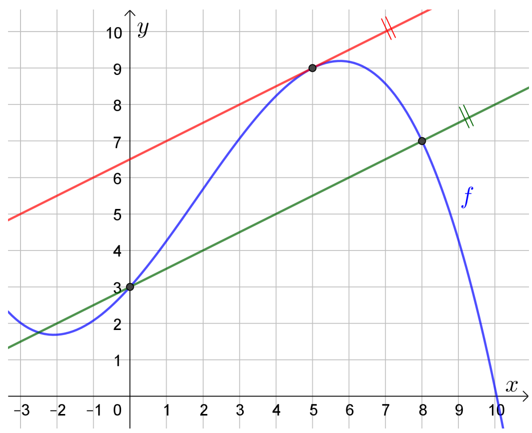


Kubische Funktion

Der Graph der kubischen Funktion f mit $f(x) = -\frac{7}{225} \cdot x^3 + \frac{77}{450} \cdot x^2 + \frac{101}{90} \cdot x + 3$ ist dargestellt.

1) Zeichne rechts die Sekante durch die Punkte $A = (0 \mid f(0))$ und $B = (8 \mid f(8))$ ein.

2) Berechne jene Stelle s im Intervall $[0; 8]$, an der die Tangente die gleiche Steigung wie die Sekante hat. Zeichne rechts diese Tangente ein.



Steigung der Sekante:

$$\frac{f(8) - f(0)}{8 - 0} = \frac{7 - 3}{8} = 0{,}5$$

$$f'(x) = -\frac{7}{75} \cdot x^2 + \frac{77}{225} \cdot x + \frac{101}{90}$$

$$f'(x) = 0{,}5 \iff -\frac{7}{75} \cdot x^2 + \frac{77}{225} \cdot x + \frac{56}{90} = 0 \iff x = -\frac{4}{3} \text{ oder } x = 5$$

Die Tangente an der Stelle $s = 5$ hat die gleiche Steigung 0,5 wie die Sekante.

Geschwindigkeiten

Der Graph einer Weg-Zeit-Funktion s ist im Zeitintervall $[0;6]$ dargestellt.

Zeichne rechts die Sekante durch die Punkte A und B ein.
Ermittle ihre Steigung und interpretiere den Wert der Steigung.

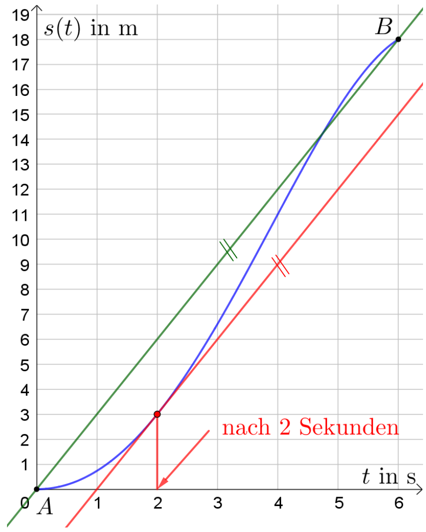
$$\text{Steigung der Sekante} = \frac{18\,\text{m}}{6\,\text{s}} = 3\,\text{m/s}$$

Die mittlere Geschwindigkeit im Zeitraum $[0;6]$ beträgt $3\,\text{m/s}$.

Der Mittelwertsatz garantiert mindestens einen Zeitpunkt,

an dem die Momentangeschwindigkeit gleich groß ist

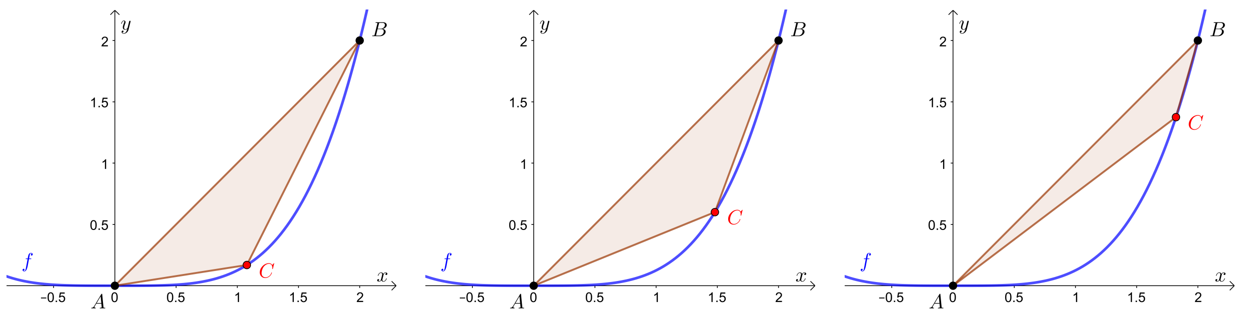
wie die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[0;6]$.



Zu welchem Zeitpunkt passiert das rechts oben zum ersten Mal? Zeichne eine zugehörige Tangente ein.

Optimierungsaufgabe

Am Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{8} \cdot x^4$ fixieren wir die Punkte $A = (0 \mid 0)$ und $B = (2 \mid 2)$.
Der Punkt C ist am Graphen dazwischen beweglich. Wir zeichnen das Dreieck ABC ein:



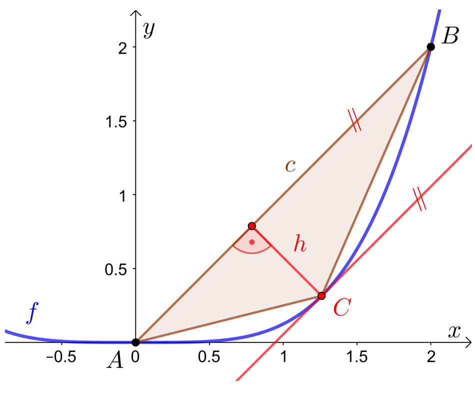
Der Flächeninhalt des Dreiecks soll so groß wie möglich werden.

1) Berechne die Länge c der Seite AB.

$$c = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2{,}828\ldots$$

2) Der Flächeninhalt $\frac{c \cdot h}{2}$ soll so groß wie möglich werden.

Ermittle rechts grafisch jenen Punkt C, für den die Höhe h so groß wie möglich ist. Zeichne das optimale Dreieck ein.



3) Berechne die Koordinaten von C.

$$\text{Steigung der Sekante} = \frac{2-0}{2-0} = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3 = 1 \iff x^3 = 2 \iff x = \sqrt[3]{2} = 1{,}25\ldots \qquad C = (1{,}25\ldots \mid \underbrace{0{,}314\ldots}_{=f(\sqrt[3]{2})})$$