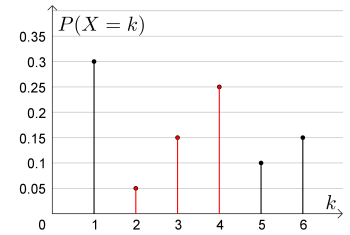


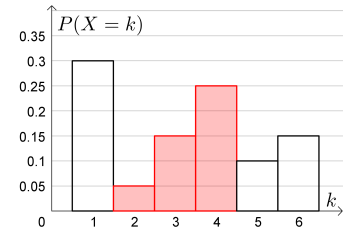


Eine **Zufallsvariable** X kann die Werte 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 annehmen. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind rechts in einem Stabdiagramm dargestellt. Trage die Wahrscheinlichkeiten (in %) unten in die Tabelle ein.

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$						



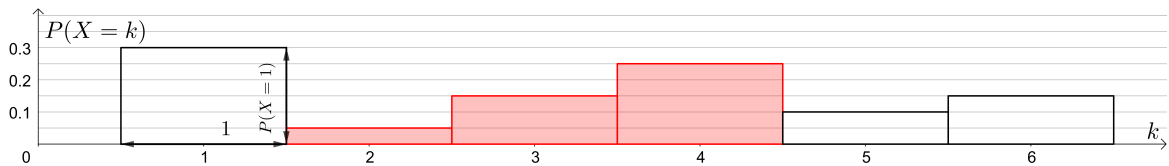
Wir wandeln das Stabdiagramm in ein bestimmtes Säulendiagramm um: Dazu ersetzen wir jeden Stab jeweils durch ein Rechteck mit derselben Höhe und der *Breite* 1. Das Ergebnis ist rechts dargestellt.



Der **Flächeninhalt** jeder Säule ist damit gleich groß wie die entsprechende **Wahrscheinlichkeit**.

Wir können die beiden Achsen unabhängig voneinander skalieren.

Die *tatsächlichen* Breiten und Höhen der Säulen – und damit der Flächeninhalt – bleiben unverändert:



Die Wahrscheinlichkeit $P(2 \leq X \leq 4)$ ist in jedem der drei Bilder rot hervorgehoben. Es gilt:

$$P(2 \leq X \leq 4) = \boxed{}$$



Wir würfeln n Mal mit einem fairen 6-seitigen Würfel.

Die Zufallsvariable S_n gibt die Anzahl der geworfenen Sechser an.

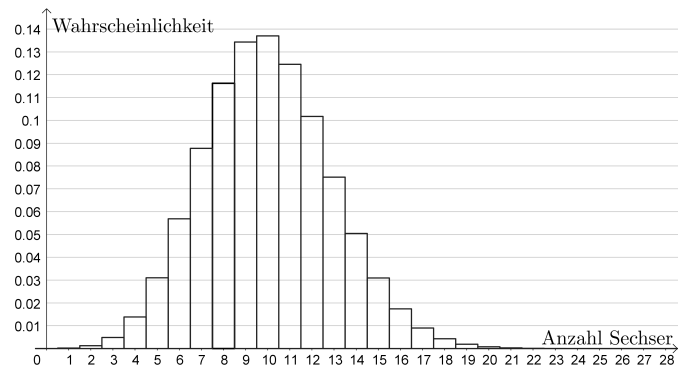
Rechts unten sind die Wahrscheinlichkeiten bei $n = 60$ Würfeln in einem Säulendiagramm dargestellt.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dabei mindestens 8 Sechser, aber höchstens 10 Sechser zu würfeln.

- 1) Markiere rechts die zugehörige Fläche.
- 2) Ermittle die Wahrscheinlichkeit mithilfe des Säulendiagramms näherungsweise:

$$P(8 \leq S_{60} \leq 10) \approx \boxed{} \%$$

- 3) Ermittle die Wahrscheinlichkeit mit Technologieeinsatz.

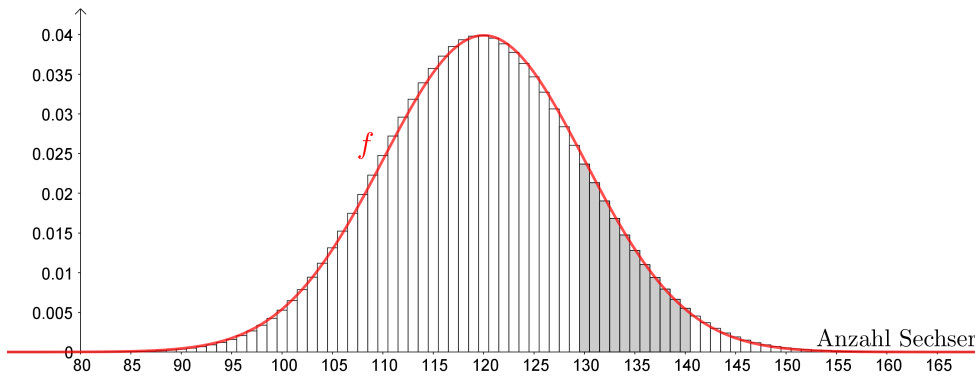


- 4) Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein:

$$P(8 \leq S_{60} \leq 10) = \underbrace{\binom{60}{8} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^8 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{52}}_{P(S_{60}=8)} + \underbrace{\binom{60}{9} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^9 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{51}}_{P(S_{60}=9)} + \underbrace{\binom{60}{10} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{50}}_{P(S_{60}=10)}$$



Bei $n = 720$ Würfeln nimmt das Säulendiagramm von S_{720} die folgende Form an:



Animationen:
 y-Achse variabel skaliert
 y-Achse fix skaliert

Der Flächeninhalt der grau markierten Säulen ist die Wahrscheinlichkeit $P(\boxed{} \leq S_{720} \leq \boxed{})$.

Wir haben auch den Graphen einer ganz bestimmten Funktion f eingezeichnet. Dieser Graph schmiegt sich an das glockenförmige Profil des Säulendiagramms an. Wie würdest du mithilfe von f diese Wahrscheinlichkeit *näherungsweise* berechnen?

$P(130 \leq S_{720} \leq 140) \approx \boxed{}$

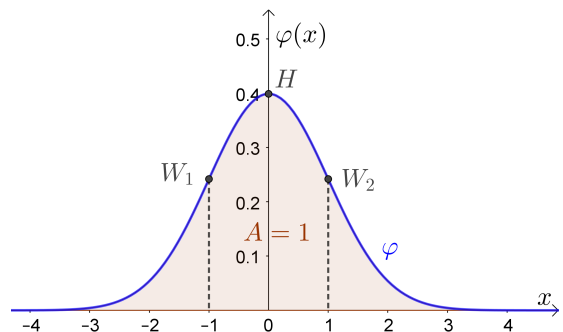
Dichtefunktion der Standardnormalverteilung



Die Funktion φ mit $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2}$ heißt **Dichtefunktion** der **Standardnormalverteilung**.

Die Dichtefunktion φ hat die folgenden Eigenschaften:

1) Alle Funktionswerte sind positiv. Warum?



2) Der größte Funktionswert ist an der Stelle $x = 0$.

$$\varphi'(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2}}_{\text{Kettenregel}} \cdot (-x) = \varphi(x) \cdot (-x)$$

3) Die beiden Wendestellen sind $x = -1$ und $x = 1$.

$$\varphi''(x) = \underbrace{\varphi'(x) \cdot (-x) + \varphi(x) \cdot (-1)}_{\text{Produktregel}} = \varphi(x) \cdot x^2 - \varphi(x) = \varphi(x) \cdot (x^2 - 1) = \varphi(x) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$$

4) Aus $x^2 = (-x)^2$ folgt $\varphi(x) = \varphi(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph ist deshalb symmetrisch zur senkrechten Achse. φ ist eine **gerade** Funktion.

5) Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n} = \boxed{}$ folgt: $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \boxed{}$ bzw. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \boxed{}$

6) Auch wenn φ **keine** elementare **Stammfunktion** hat, kann man folgende Eigenschaft zeigen:

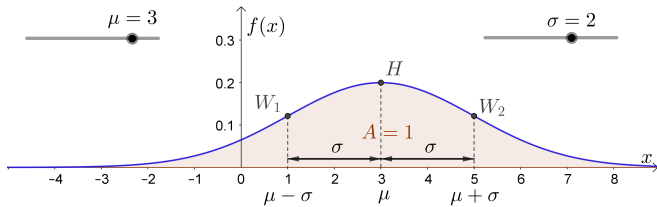
$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1 = 100\%$$



Die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

heißt **Dichtefunktion der Normalverteilung** mit **Erwartungswert μ** und **Standardabweichung $\sigma > 0$** .



Die beiden Funktionsgleichungen

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} \quad \text{und} \quad f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

sind eng miteinander verknüpft. Tatsächlich entsteht der Graph von f aus dem Graphen von φ in 3 Schritten:

i) **Horizontale Skalierung** um den Faktor σ :

$$f_1(x) = \varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$$

ii) **Horizontale Verschiebung** um μ Einheiten nach rechts:

$$f_2(x) = f_1(x - \mu) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

iii) **Vertikale Skalierung** um den Faktor $\frac{1}{\sigma}$:

$$f(x) = \frac{f_2(x)}{\sigma} = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Die Dichtefunktion f hat die folgenden Eigenschaften:

- 1) Alle Funktionswerte sind positiv.
- 2) Der größte Funktionswert ist an der Stelle $x = \square$.
- 3) Die beiden Wendestellen sind $x = \square$ und $x = \square$.
- 4) Es gilt $f(\mu + x) = f(\mu - x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Also ist der Graph symmetrisch zur senkrechten Gerade $x = \square$.
- 5) Es gilt: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \square$ bzw. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \square$
- 6) Der gesamte Flächeninhalt zwischen der x -Achse und dem Funktionsgraphen ist \square .
- 7) Eine Veränderung von μ bewirkt eine _____ des Graphen in _____-Richtung.
- 8) Je größer σ ist, desto _____ ist der größte Funktionswert und desto _____ ist die Entfernung der beiden Wendestellen.
- 9) Je kleiner σ ist, desto _____ ist der größte Funktionswert und desto _____ ist die Entfernung der beiden Wendestellen.
- 10) f ist die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung, wenn $\mu = \square$ und $\sigma = \square$ ist.

Normalverteilte Zufallsvariable

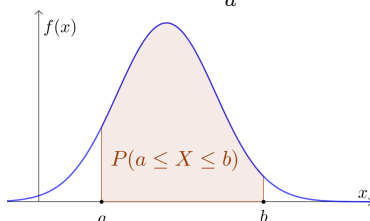


f ist die Dichtefunktion der Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung $\sigma > 0$.

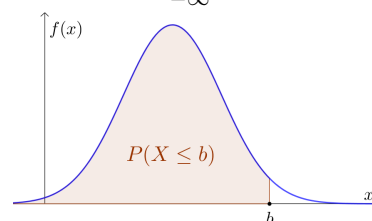
Eine **Zufallsvariable X** heißt **normalverteilt** mit **Erwartungswert μ** und

Standardabweichung σ , wenn die folgenden Gleichungen für alle reellen Zahlen $a \leq b$ gelten:

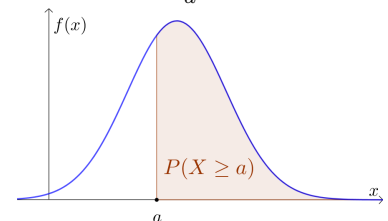
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$




$$P(X \leq b) = \int_{-\infty}^b f(x) dx$$



$$P(X \geq a) = \int_a^{\infty} f(x) dx$$



Eine normalverteilte Zufallsvariable kann also jede reelle Zahl als Wert annehmen.

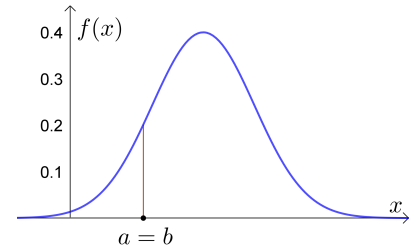
$f(a) \neq P(X = a)$  **MmF**

X ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit Dichtefunktion f .
 Wie wahrscheinlich ist es, dass X *genau* den Wert $a \in \mathbb{R}$ annimmt?
 Für diese Wahrscheinlichkeit gilt:


$$P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(x) dx = \boxed{}$$

Wenn X eine normalverteilte Zufallsvariable ist, dann gilt also:

$$P(X \leq a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a)$$



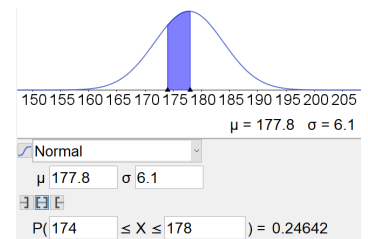
Das ist anders als bei der [Binomialverteilung](#).

Körpergröße  **MmF**

Die Körpergröße X von 42-jährigen Männern ist annähernd normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 177,8$ cm und Standardabweichung $\sigma = 6,1$ cm. Ein 42-jähriger Mann wird zufällig ausgewählt.

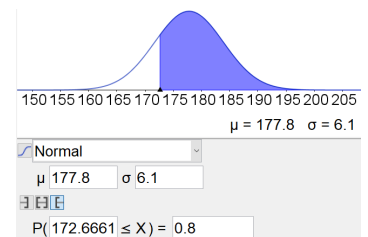
a) Berechne mit Technologieeinsatz die Wahrscheinlichkeit, dass seine Körpergröße ...

... im Intervall [174 cm; 178 cm] liegt.



... größer als 190 cm ist.

... kleiner als 178 cm ist.



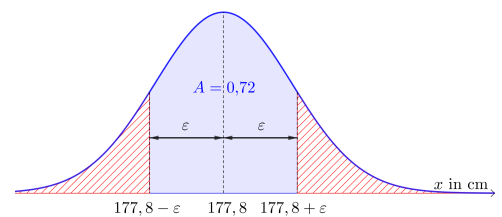
b) Welche Körpergröße übertrifft er mit der Wahrscheinlichkeit 80 %?

Welche Körpergröße übertrifft er mit der Wahrscheinlichkeit 45 % *nicht*?

c) In welchem um μ symmetrischen Intervall liegt die Körpergröße mit der Wahrscheinlichkeit 72 %?

Dieses Intervall heißt auch zweiseitiger 72%-[Zufallsstrebereich](#) für einen Einzelwert von X .

Rechts ist die zugehörige Fläche blau markiert. Welchen Inhalt haben die beiden rot schraffierten Flächen links und rechts vom um μ symmetrischen Intervall jeweils?



Berechne die beiden Intervallgrenzen mit Technologieeinsatz:

$$P(X \leq \boxed{}) = 14\% \quad P(X \geq \boxed{}) = 14\%$$

Die Körpergröße befindet sich also mit der Wahrscheinlichkeit 72 %

im Intervall [$\boxed{}$ cm, $\boxed{}$ cm].



Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung $\sigma > 0$.
 Man kann zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit

$$P(\mu - k \cdot \sigma \leq X \leq \mu + k \cdot \sigma)$$

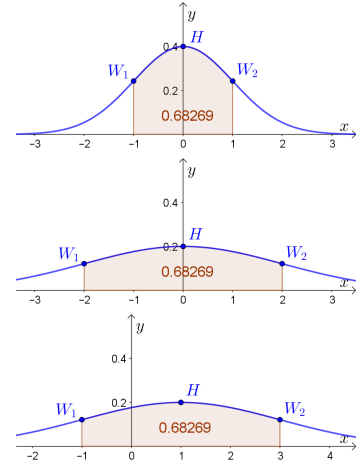
nicht von μ bzw. σ abhängt, sondern nur von $k \geq 0$.

Zum Beispiel ist in jedem der drei Bilder rechts $k = 1$.

Ermittle die folgenden Wahrscheinlichkeiten mit Technologieeinsatz.

Runde jeweils auf eine Nachkommastelle.

- 1) $P(\mu - 1 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 1 \cdot \sigma) \approx$ %
- 2) $P(\mu - 2 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 2 \cdot \sigma) \approx$ %
- 3) $P(\mu - 3 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 3 \cdot \sigma) \approx$ %



Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit $\mu = 40$ g und $\sigma = 2$ g. Du erzeugst eine große Stichprobe mit Werten aus dieser Normalverteilung. Beantworte die folgenden Fragen ohne Technologieeinsatz.

- a) In welchem um μ symmetrischen Intervall sollten rund 95 % der Werte liegen?
- b) Ungefähr wieviel Prozent der Werte sollten kleiner als 38 g sein?



Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung $\sigma > 0$.

Dann ist die Zufallsvariable $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ standardnormalverteilt – also mit $\mu_Z = 0$ und $\sigma_Z = 1$.

Das heißt: Erfüllen die Intervallgrenzen von $[x_1; x_2]$ und $[z_1; z_2]$ die Gleichungen

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma},$$

dann gilt: $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(z_1 \leq Z \leq z_2)$ Insbesondere gilt: $P(\mu - k \cdot \sigma \leq X \leq \mu + k \cdot \sigma) = P(-k \leq Z \leq k)$

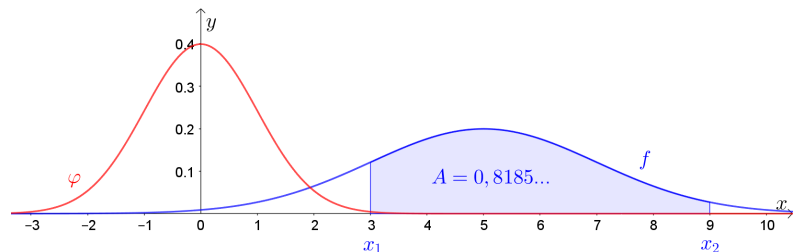
Für die normalverteilte Zufallsvariable X im Bild rechts unten gilt $\mu = 5$ und $\sigma = 2$.

Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein.

$$x_1 = 3 \implies z_1 = \text{$$

$$x_2 = 9 \implies z_2 = \text{$$

$$P(3 \leq X \leq 9) = P(\text{} \leq Z \leq \text{})$$



Allgemein gilt nämlich: $\underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx}_{=P(x_1 \leq X \leq x_2)} = \underbrace{\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2} dz}_{P(z_1 \leq Z \leq z_2)} \quad \left(\text{Substitution } z = \frac{x-\mu}{\sigma} \text{ mit } \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sigma}\right)$

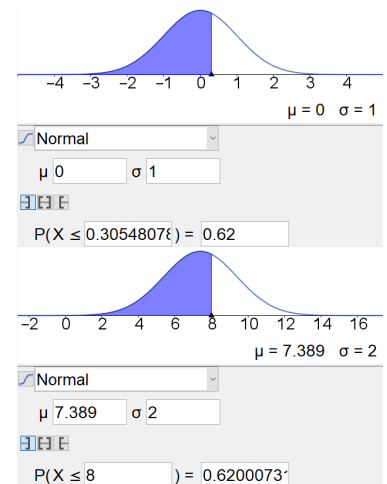
Die normalverteilte Zufallsvariable X hat die Standardabweichung $\sigma = 2$. Weiters gilt: $P(X \leq 8) = 0,62$
 Wie groß ist der Erwartungswert μ von X ?

Dazu berechnen wir die entsprechende Intervallgrenze z der standardnormalverteilte Zufallsvariable Z :


$$P(Z \leq z) = 0,62 \implies z = \boxed{}$$

Die Intervallgrenze $x = 8$ von X entspricht also der Intervallgrenze $z = 0,30548\dots$ von Z .

Setze in $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ ein, und berechne den Erwartungswert μ von X .



Rechts kontrollieren wir das Ergebnis mit Technologieeinsatz.

Annäherung: Binomialverteilung – Normalverteilung 

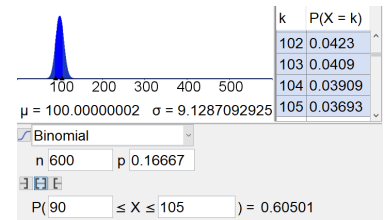
Du würfelst 600 Mal mit einem fairen 6-seitigen Würfel.
 Wie wahrscheinlich ist es, dass du dabei mindestens 90, aber höchstens 105 Sechser würfelst?
 Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der geworfenen Sechser an.

1) X ist binomialverteilt mit $n = \boxed{}$ und $p = \boxed{}$.

$$P(90 \leq X \leq 105) = \boxed{}\%$$

$$\text{Erwartungswert: } E(X) = n \cdot p = \boxed{}$$

$$\text{Standardabweichung: } \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \boxed{}$$

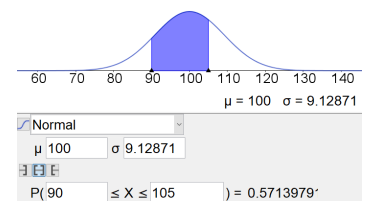


2) Wir können diese Wahrscheinlichkeit auch durch eine normalverteilte Zufallsvariable X' mit gleichem Erwartungswert und gleicher Standardabweichung annähern. **Satz von Moivre-Laplace**

$$\text{Erwartungswert: } \mu = E(X) = \boxed{}$$

$$\text{Standardabweichung: } \sigma = \sigma(X) = \boxed{}$$

$$P(90 \leq X' \leq 105) = \boxed{}\%$$

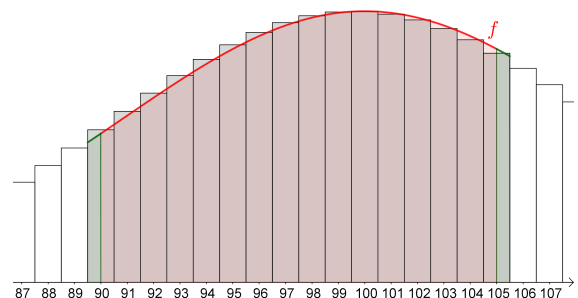


Rechts unten ist das Säulendiagramm der binomialverteilten Zufallsvariable X dargestellt.

Wodurch entsteht der (relativ große) Unterschied zwischen $P(90 \leq X \leq 105)$ und $\int_{90}^{105} f(x) dx$?

Eine bessere Annäherung erhalten wir durch Anwendung der sogenannten Stetigkeitskorrektur:

$$P(89,5 \leq X' \leq 105,5) = \boxed{}\%$$



Warum nähert man die Binomialverteilung an? GeoGebra scheitert beim Versuch der exakten Berechnung von $\binom{100000}{42000}$ zurecht. Bei $n = 100000$ wird die Binomialverteilung aber relativ gut durch die Normalverteilung angenähert.