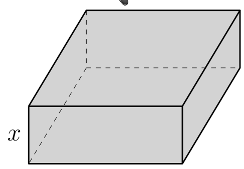
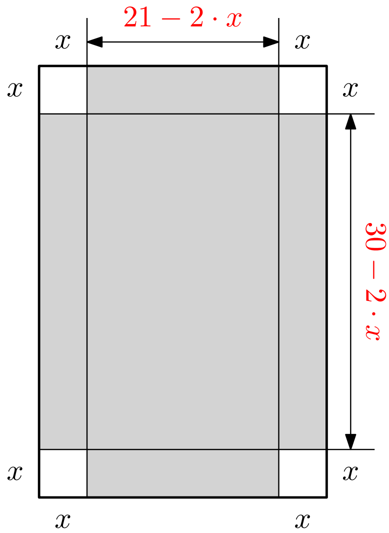
Volumen einer Schachtel maximieren

Aus einem rechteckigen Stück Karton mit den Seitenlängen $a = 21\,\text{cm}$ und $b = 30\,\text{cm}$ wollen wir eine Schachtel mit möglichst großem Volumen falten. Dazu schneiden wir von den 4 Ecken jeweils ein Quadrat mit x cm Seitenlänge ab.





1) Ergänze die Längen im Bild links.

2) Für welche Werte von x können wir eine Schachtel falten?

$0\,\text{cm} < x < 10{,}5\,\text{cm}$

3) $V(x)\ldots$ Volumen der Schachtel in cm^3
Stelle eine Gleichung der Funktion V auf:

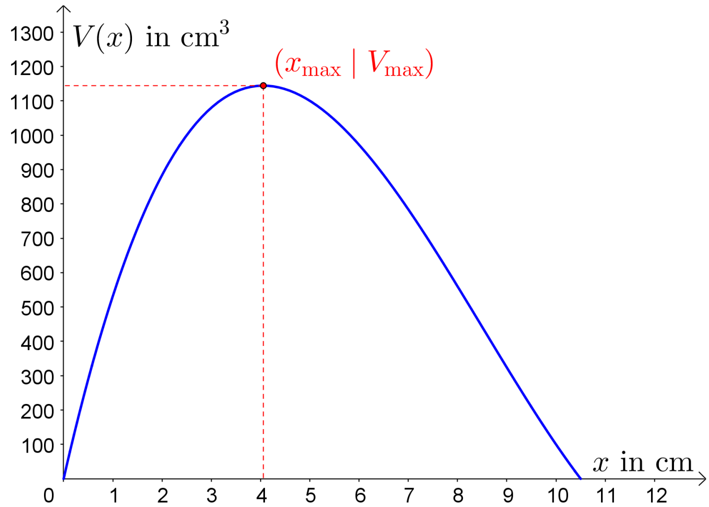
$V(x) = (21 - 2 \cdot x) \cdot (30 - 2 \cdot x) \cdot x$

Im Bild rechts siehst du den Graphen der Funktion V.

Wir möchten x so wählen, dass das Volumen so groß wie möglich ist.

Zeichne das globale Maximum von V rechts ein. Lies seine Koordinaten so genau wie möglich ab:

$x_{\text{max}} \approx 4\,\text{cm}$ $\quad V_{\text{max}} \approx 1150\,\text{cm}^3$



4) Versuche mit dem Taschenrechner V_{max} möglichst genau zu bestimmen.
Trage deine berechneten Wertepaare in der Tabelle ein.

x	4	4,1	4,05	4,06	4,07	
$V(x)$	1144	1144,064...	1144,165...	1144,166...	1144,156...	

$x_{\text{max}} \approx 4{,}06\,\text{cm}$ $\qquad V_{\text{max}} \approx 1144{,}16\ldots\,\text{cm}^3$

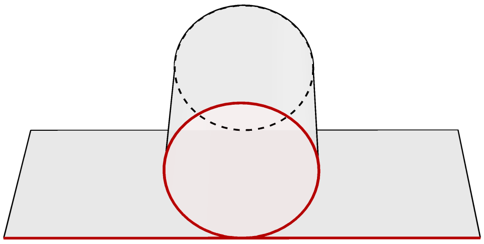
Die exakten Werte sind übrigens $x_{\text{max}} = \dfrac{17 - \sqrt{79}}{2}$ und $V_{\text{max}} = \sqrt{79^3} + 442$.

Diese Werte können wir mit Hilfe der Differentialrechnung bestimmen.

Oberfläche eines Zylinders minimieren

Wir wollen eine zylindrische Konservendose mit dem Volumen $V = 500\,\mathrm{cm}^3$ herstellen.
Die Materialkosten (Oberfläche) sollen dabei so klein wie möglich sein.
Der dargestellte Zylinder hat den Radius r und die Höhe h.

1) Der abgerollte Mantel ist ein Rechteck mit den Seitenlängen $2 \cdot r \cdot \pi$ und h.



2) Stelle eine Formel für die Oberfläche O des Zylinders mit dem Radius r und der Höhe h auf:

$$O = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$

3) Stelle eine Formel für das Volumen V des Zylinders mit dem Radius r und der Höhe h auf:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

4) Kennst du den Radius eines Zylinders mit dem Volumen $V = 500\,\mathrm{cm}^3$, dann kennst du auch seine Höhe:

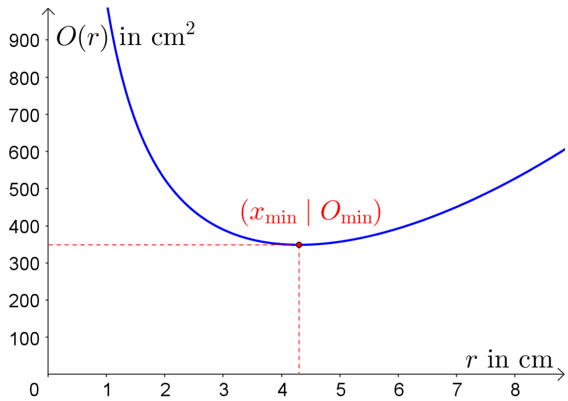
$$h = \frac{500}{r^2 \cdot \pi}$$

5) $O(r)\ldots$ Oberfläche des Zylinders (in cm^2)
Stelle eine Gleichung der Funktion O auf:

$$O(r) = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{500}{r^2 \cdot \pi} =$$

$$= 2 \cdot r^2 \cdot \pi + \frac{1000}{r}$$

Was passiert mit $O(r)$, wenn r sehr groß oder nahe 0 ist?



Im Bild rechts siehst du den Graphen der Funktion O.
Wir möchten den Radius r des Zylinders so wählen, dass die Oberfläche so klein wie möglich ist.
Zeichne das globale Minimum von O im Bild oben ein.
Lies seine Koordinaten so genau wie möglich ab:

Hinweis: Nimm ein Geodreieck und verschiebe es parallel zur x-Achse, um das globale Minimum zu finden.

$r_{\min} \approx 4{,}3\,\mathrm{cm}$ $\quad O_{\min} \approx 350\,\mathrm{cm}^3$

Die exakten Werte sind übrigens $r_{\min} = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$ und $O_{\min} = 150 \cdot \sqrt[3]{4 \cdot \pi}$.

Diese Werte können wir mit Hilfe der Differentialrechnung bestimmen.

Berechne die zugehörige Höhe $h_{\min}$.
Zeige dann, dass $h_{\min} = 2 \cdot r_{\min}$ gilt.

Die Höhe des optimalen Zylinders ist also gleich groß wie sein Durchmesser.

$$r_{\min} = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} = 4{,}301\ldots\,\mathrm{cm} \implies h_{\min} = \frac{500}{r_{\min}^2 \cdot \pi} = 8{,}602\ldots\,\mathrm{cm}$$

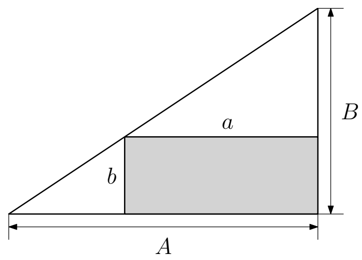
$$\frac{h_{\min}}{r_{\min}} = \frac{500}{r_{\min}^3 \cdot \pi} = \frac{500}{\frac{250}{\pi} \cdot \pi} = \frac{500}{250} = 2 \implies h_{\min} = 2 \cdot r_{\min}$$

Rechteck in rechtwinkligem Dreieck maximieren

Wir wollen dem rechts dargestellten rechtwinkligen Dreieck mit den Kathethenlängen $A = 10\,\text{cm}$ und $B = 4\,\text{cm}$ ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt einschreiben.

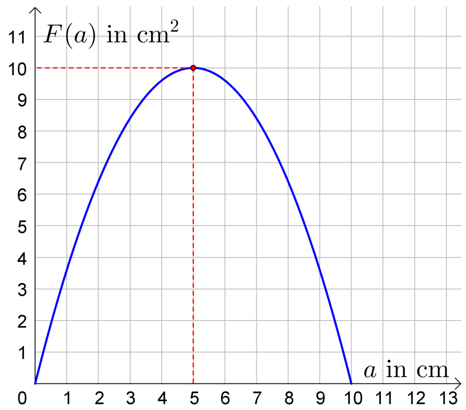
Die Seiten des Rechtecks sind parallel zu den Katheten des Dreiecks.

Die linke obere Ecke des Rechtecks sucht also auf der Hypotenuse ihren „Lieblingsplatz“.



1) Stelle eine Formel für den Flächeninhalt F des Rechtecks mit den Seitenlängen a und b auf:

$F = a \cdot b$



2) Erkläre den folgenden Zusammenhang. Forme auf b um.

Tipp: Strahlensatz

$$\frac{A}{A-a} = \frac{B}{b} \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{B \cdot (A-a)}{A} = 4 - 0{,}4 \cdot a$$

3) $F(a) \ldots$ Flächeninhalt des Rechtecks in cm^2
Stelle eine Gleichung der Funktion F auf:

$F(a) = a \cdot (4 - 0{,}4 \cdot a)$

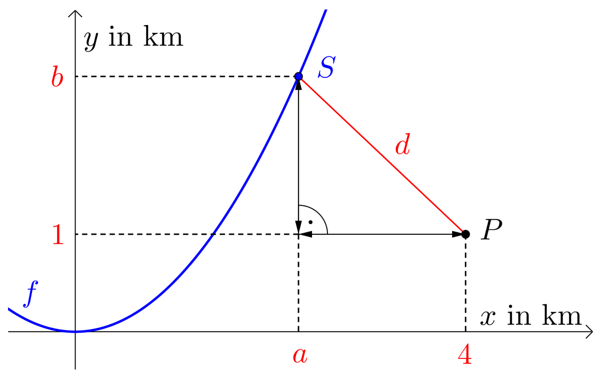
4) F ist eine quadratische Funktion mit den Nullstellen $a_1 = 0\,\text{cm}$ und $a_2 = 10\,\text{cm}$.

Mit der Seitenlänge $a_{\max} = 5\,\text{cm}$ wird der maximale Flächeninhalt $F_{\max} = 10\,\text{cm}^2$ erreicht.

Flugbahn eines Raumschiffs

Ein Raumschiff fliegt entlang des Graphen von $f(x) = \frac{x^2}{2}$. In welchem Punkt $S = (a \mid b)$ auf seiner Flugbahn ist es dem Planeten im Punkt $P = (4 \mid 1)$ am nächsten? (Angaben in km)

1) Beschrifte die Skizze.

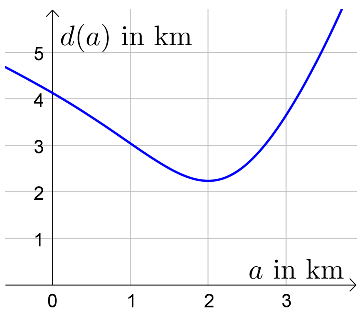


2) Stelle eine Formel für den Abstand d zwischen den Punkten S und P auf:

$d = \sqrt{(4-a)^2 + (b-1)^2}$

3) Für jeden Punkt $S = (a \mid b)$ auf der Flugbahn gilt

$$b = f(a) = \frac{a^2}{2}\,.$$



4) $d(a) \ldots$ Abstand zwischen $S = (a \mid f(a))$ und $P = (4 \mid 1)$ in km
Stelle eine Gleichung der Funktion d auf:

$$d(a) = \sqrt{(4-a)^2 + \left(\frac{a^2}{2} - 1\right)^2}$$

5) Lies den optimalen Wert $a_{\min}$ links ab. In welchem Punkt ist das Raumschiff dem Planeten am nächsten? Wie groß ist der Abstand?

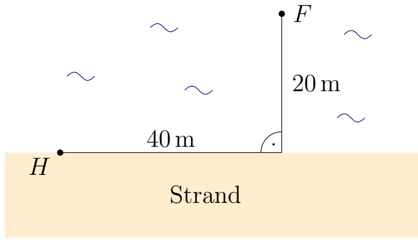
$$a_{\min} = 2 \quad \Longrightarrow \quad S_{\min} = (2 \mid 2) \quad \Longrightarrow \quad d_{\min} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} = 2{,}236\ldots\,\text{km}$$

Hund und Frisbee

Der Hund „Elvis“ steht am Ufer und möchte auf schnellstem Weg ein Frisbee im Wasser erreichen.
An Land läuft Elvis mit konstanter Geschwindigkeit $v_L = 3\,\text{m/s}$.
Im Wasser schwimmt Elvis mit konstanter Geschwindigkeit $v_W = 1\,\text{m/s}$.

1) Wie lang braucht Elvis auf direktem Weg durch das Wasser?

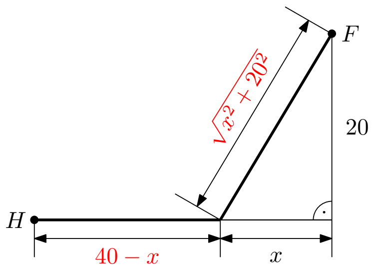
$$t = \frac{s}{v} = \frac{\sqrt{40^2 + 20^2}}{1} = 44{,}72\ldots\,\text{s}$$



2) Wie lang braucht Elvis, wenn er so kurz wie möglich zur Frisbee schwimmt?

$$t_L + t_W = \frac{s_L}{v_L} + \frac{s_W}{v_W} = \frac{40}{3} + \frac{20}{1} = 33{,}33\ldots\,\text{s}$$

Ein Mathematiker hat festgestellt, dass sein Hund „Elvis“ intuitiv einen besseren Weg als in **1)** oder **2)** wählt.



3) Ergänze die Längen im Bild links.
Die Randwerte $x = 40$ und $x = 0$ haben wir in **1)** und **2)** behandelt.
Der optimale Wert für x liegt dazwischen. Was schätzt du?

4) Wie lang läuft Elvis am Strand (in Abhängigkeit von x)?

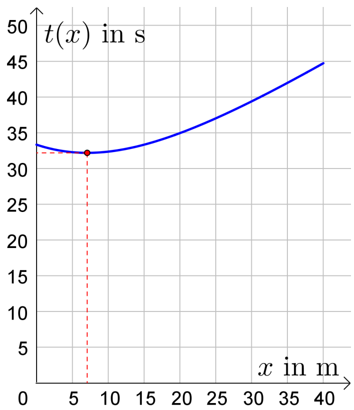
$$t_L = \frac{s_L}{v_L} = \frac{40 - x}{3}$$

5) Wie lang schwimmt Elvis im Wasser (in Abhängigkeit von x)?

$$t_W = \frac{s_W}{v_W} = \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{1} = \sqrt{x^2 + 400}$$

6) $t(x)\ldots$ Gesamtzeit in s
Stelle eine Gleichung der Funktion t auf:

$$t(x) = \frac{40 - x}{3} + \sqrt{x^2 + 400}$$



Im Bild rechts siehst du den Graphen der Funktion t.
Findest du deine Ergebnisse aus **1)** und **2)** wieder?

Wir möchten x so wählen, dass die Gesamtzeit so klein wie möglich ist.

7) Der optimale Wert für x ist $x_{\min} = \sqrt{50} = 7{,}07\ldots\,\text{m}$. Findest du auch diesen Wert im Bild wieder?
Diesen Wert können wir mit Hilfe der Differentialrechnung bestimmen.

Um wie viel Prozent ist Elvis auf dem optimalen Weg schneller als in **1)** bzw. als in **2)**?

$t_{\min} = t(\sqrt{50}) = 32{,}18\ldots\,\text{s}$

Vergleich zu **1)**: $\dfrac{t_{\min}}{44{,}72\ldots} = 0{,}7197\ldots = 71{,}97\ldots\,\%$
$\implies$ Elvis ist um $100\,\% - 71{,}97\ldots\,\% = 28{,}02\ldots\,\%$ schneller als in **1)**.

Vergleich zu **2)**: $\dfrac{t_{\min}}{33{,}33\ldots} = 0{,}9656\ldots = 96{,}56\ldots\,\%$
$\implies$ Elvis ist um $100\,\% - 96{,}56\ldots\,\% = 3{,}43\ldots\,\%$ schneller als in **2)**.

Dieses Werk von Mathematik macht Freu(n)de unterliegt einer CC BY-NC-ND 4.0 Lizenz.
http://mmf.univie.ac.at