



Erinnere dich, wie das **Pascalsche Dreieck** beim Ausmultiplizieren von Binomen hilft:

$(a + b)^0 = 1$					1
$(a + b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$				1	1
$(a + b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot b + 1 \cdot b^2$			1	2	1
$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + 1 \cdot b^3$		1	3	3	1
$(a + b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + 1 \cdot b^4$	1	4	6	4	1

Pascalsches Dreieck ↔ Binomialkoeffizienten



Die Zahlen im Pascalschen Dreieck sind genau die folgenden Binomialkoeffizienten:

										$\binom{0}{0}$
		1	1							$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$
		1	2	1						$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$
	1	3	3	1						$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$
1	4	6	4	1						$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$
1	5	10	10	5	1					$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$

Kombinatorisch können wir das erklären:

- 1) Es gilt $\binom{5}{5} = 1$ und allgemein $\binom{n}{n} = 1$.
Um aus 5 Personen eine Gruppe mit 5 Personen auszuwählen, gibt es nur eine Möglichkeit.
- 2) Es gilt $\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1$ und allgemein $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. $0! = 1$

In beiden Dreiecken ist also jede Zahl am linken und rechten Rand 1.

- 3) Im Pascalschen Dreieck ist jede Zahl im Inneren die Summe der beiden Nachbarzahlen darüber.

Die entsprechende Gleichung im rechten Dreieck ist $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Tatsächlich gilt zum Beispiel $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$, denn auf beiden Seiten der Gleichung wird das gleiche Abzählproblem gelöst:

$\binom{5}{3}$ ist die Anzahl an Möglichkeiten, um aus 5 Personen eine Gruppe mit 3 Personen auszuwählen.

Die größte der 5 Personen kannst du entweder für die Gruppe auswählen oder nicht auswählen.

- Wenn du sie auswählst, musst du aus den anderen 4 Personen noch eine Gruppe mit 2 Personen auswählen. Dafür gibt es $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten.
- Wenn du sie nicht auswählst, musst du aus den anderen 4 Personen noch eine Gruppe mit 3 Personen auswählen. Dafür gibt es $\binom{4}{3}$ Möglichkeiten.

Also stimmen auch die Zahlen im Inneren der beiden Dreiecke überein.

Binomialkoeffizienten ↔ Binome ausmultiplizieren



Wir multiplizieren den Term $(a + b)^3$ aus und vereinfachen erst im letzten Schritt:

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) = (a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b) \cdot (a + b) = \\ &= a \cdot a \cdot a + a \cdot b \cdot a + b \cdot a \cdot a + b \cdot b \cdot a + a \cdot a \cdot b + a \cdot b \cdot b + b \cdot a \cdot b + b \cdot b \cdot b = \\ &= 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + 1 \cdot b^3 \end{aligned}$$

Angenommen wir multiplizieren

$$(a + b)^5 = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b)$$

ohne zu vereinfachen aus. Dann erhalten wir insgesamt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ Summanden.

Bei jeder Klammer können wir uns *unabhängig* für a oder für b entscheiden.

Einer dieser Summanden ist zum Beispiel $a \cdot b \cdot a \cdot a \cdot b = a^3 \cdot b^2$.

Den gleichen Summanden $a^3 \cdot b^2$ erhalten wir beim Ausmultiplizieren aber auf verschiedene Arten.

Um $a^3 \cdot b^2$ zu erhalten, müssen wir uns bei den $n = 5$ verschiedenen Klammern genau $k = 2$ Mal für b entscheiden.

Der Summand $a^3 \cdot b^2$ kommt beim Ausmultiplizieren insgesamt $\binom{5}{2} = 10$ Mal vor.

Das ist eine kombinatorische Erklärung für den sogenannten **Binomischen Lehrsatz**:

$$\begin{aligned} (a + b)^5 &= \binom{5}{0} \cdot a^5 \cdot b^0 + \binom{5}{1} \cdot a^4 \cdot b^1 + \binom{5}{2} \cdot a^3 \cdot b^2 + \binom{5}{3} \cdot a^2 \cdot b^3 + \binom{5}{4} \cdot a^1 \cdot b^4 + \binom{5}{5} \cdot a^0 \cdot b^5 \\ &= 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + 1 \cdot b^5 \end{aligned}$$

Deshalb heißt $\binom{n}{k}$ auch **Binomialkoeffizient**.

$\binom{n}{k}$ ist der *Koeffizient* von $a^{n-k} \cdot b^k$ beim Ausmultiplizieren des *Binoms* $(a + b)^n$.

Multinomialkoeffizient



Angenommen wir multiplizieren

$$(x + y + z)^9 = (x + y + z) \cdot (x + y + z) \cdot \dots \cdot (x + y + z)$$

ohne zu vereinfachen aus. Dann erhalten wir insgesamt $3^9 = 19\,683$ Summanden.

Erkläre, warum dabei kein Summand $x^3 \cdot y^5 \cdot z^2$ vorkommen kann.

Die Summe der Exponenten ist $3 + 5 + 2 = 10$. Sie müsste aber 9 sein.

Wie oft erhalten wir beim Vereinfachen am Ende den Summanden $x^2 \cdot y^4 \cdot z^3$?

Hinweis: Es ist genau die Anzahl möglicher Farbmuster beim Anordnen von 2 blauen, 4 roten und 3 grünen Kugeln in einer Reihe.

Am **Arbeitsblatt – Kombinatorik** findest du mehr dazu.

$$\frac{9!}{2! \cdot 4! \cdot 3!} = 1260$$

Allgemein schreiben wir auch

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!} = \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} \quad \text{mit } k_1 + k_2 + \dots + k_r = n \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}$$

und nennen den Ausdruck einen **Multinomialkoeffizienten**.