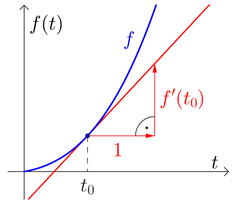
Momentane Änderungsrate

Rechts ist die Tangente an den Graphen einer Funktion f an der Stelle t_0 eingezeichnet.
Erinnere dich, dass der Differentialquotient

$$f'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$$



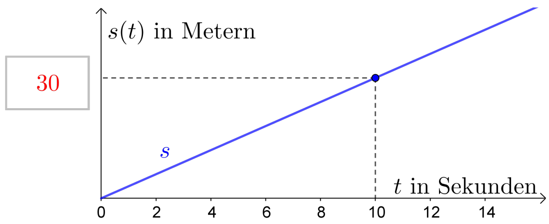
die lokale Änderungsrate – also die Steigung von f an der Stelle t_0 – misst.
Wenn t_0 ein Zeitpunkt ist, nennen wir die lokale Änderungsrate auch **momentane Änderungsrate**.

Konstante Geschwindigkeit

Wenn du mit der *konstanten* Geschwindigkeit $v = 3\,\text{m/s}$ läufst,
dann legst du pro Sekunde 3 Meter zurück,
also in t Sekunden insgesamt $3 \cdot t$ Meter.
Für die zugehörige Weg-Zeit-Funktion s gilt also:

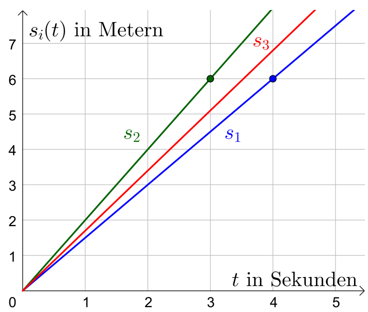
$$s(t) = 3 \cdot t$$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden
$s(t) \ldots$ zurückgelegter Weg in Metern im Zeitintervall $[0; t]$



Im Bild ist der Graph der linearen Funktion s dargestellt. Trage die richtige Zahl in das Kästchen ein.
Die konstante Steigung der Weg-Zeit-Funktion s ist also die konstante Geschwindigkeit v.

Konstante Geschwindigkeit



Lukas und Mario bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit.
Ihre Weg-Zeit-Funktionen s_1 und s_2 sind links grafisch dargestellt.

1) Ermittle die zugehörigen Geschwindigkeiten v_1 und v_2.

$$v_1 = \frac{6\,\text{m}}{4\,\text{s}} = 1{,}5\,\text{m/s} \qquad v_2 = \frac{6\,\text{m}}{3\,\text{s}} = 2\,\text{m/s}$$

Ariana startet gleichzeitig und bewegt sich auch mit konstanter Geschwindigkeit. Ihre Geschwindigkeit liegt zwischen v_1 und v_2.

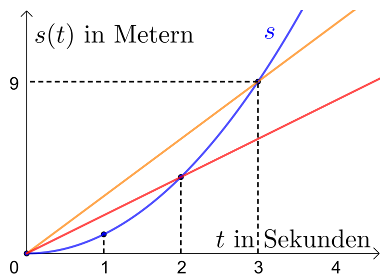
2) Zeichne einen möglichen Graphen ihrer Weg-Zeit-Funktion s_3 ein.

Mittlere Geschwindigkeit

Rechts ist eine nicht-lineare Weg-Zeit-Funktion s grafisch dargestellt.
Die Geschwindigkeit ist also *nicht* konstant.

1) Berechne die Steigung der eingezeichneten Sekante.
Welche Einheit hat diese Steigung?
Welche physikalische Interpretation hat diese Steigung?

2) Begründe, in welchem der beiden Zeitintervalle $[0; 2]$ bzw. $[0; 3]$ die mittlere Geschwindigkeit größer ist.



1) $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{9\,\text{m}}{3\,\text{s}} = 3\,\text{m/s}$ ist die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[0; 3]$.

2) Die Sekante durch die Punkte $(0 \mid s(0))$ und $(2 \mid s(2))$ hat eine kleinere Steigung.
Also ist die mittlere Geschwindigkeit in $[0; 3]$ größer als in $[0; 2]$.

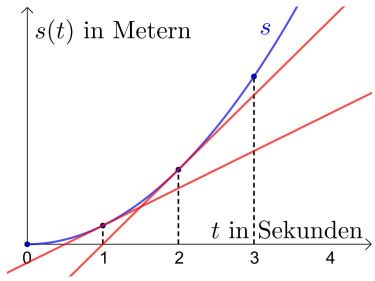
Momentangeschwindigkeit

Rechts ist eine nicht-lineare Weg-Zeit-Funktion s grafisch dargestellt.
An den Stellen $t = 1$ und $t = 2$ ist jeweils die Tangente eingezeichnet.

1) Trage $<$, $=$ oder $>$ richtig in das Kästchen ein.

$$s'(1) < s'(2)$$

2) Welche Einheit haben $s'(1)$ und $s'(2)$? Hast du eine Vermutung, welche physikalische Interpretation diese Steigungen haben?



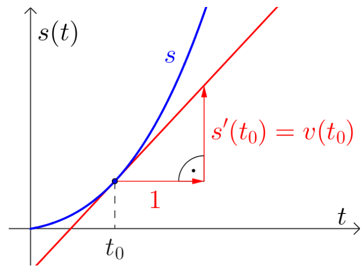
2) $s'(1)$ und $s'(2)$ haben die Einheit m/s.
Die Steigung der Tangente gibt die Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt an.

Geschwindigkeit-Zeit-Funktion

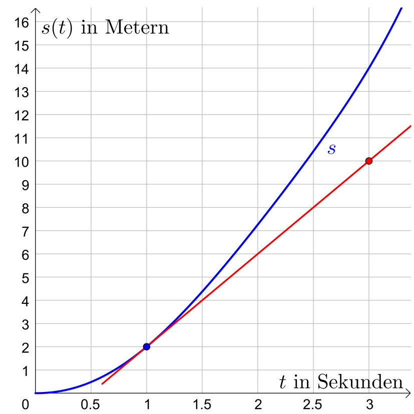
Die momentane Änderungsrate der Weg-Zeit-Funktion s zum Zeitpunkt t_0 ist genau die Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt.

Die **Ableitungsfunktion der Weg-Zeit-Funktion s** ist also die **Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v**.

Kurz: $\boldsymbol{s'(t) = v(t)}$



Momentangeschwindigkeit



Links ist eine Weg-Zeit-Funktion s grafisch dargestellt.
An der Stelle $t = 1$ ist die Tangente eingezeichnet.
Ermittle die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1$.

$$v(1) = s'(1) = \frac{8\,\text{m}}{2\,\text{s}} = 4\,\text{m/s}$$

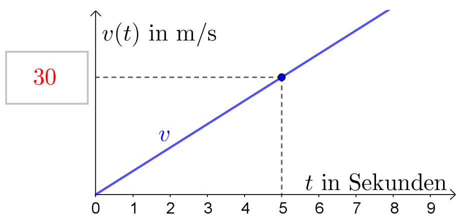
Konstante Beschleunigung

Ein Auto beschleunigt aus dem Stillstand mit der *konstanten* Beschleunigung $a = 6\,\text{m/s}^2$.

Das heißt: Das Auto wird pro Sekunde um $6\,\text{m/s}$ schneller.
Für die zugehörige Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v gilt also:

$$v(t) = 6 \cdot t$$

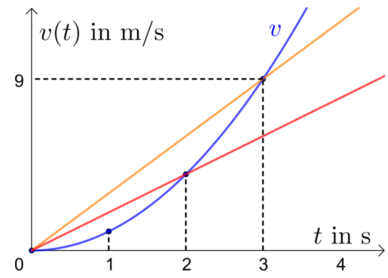
$t \ldots$ Zeit in Sekunden
$v(t) \ldots$ Geschwindigkeit in m/s zum Zeitpunkt t



Rechts oben ist der Graph der linearen Funktion v dargestellt.
Trage die richtige Zahl in das Kästchen ein.
Die konstante Steigung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v ist also die konstante Beschleunigung a.

Mittlere Beschleunigung

Rechts ist eine nicht-lineare Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v grafisch dargestellt. Die Beschleunigung ist also *nicht* konstant.



1) Berechne die Steigung der eingezeichneten Sekante.
Welche Einheit hat diese Steigung?
Welche physikalische Interpretation hat diese Steigung?

2) Begründe, in welchem der beiden Zeitintervalle $[0; 2]$ bzw. $[0; 3]$ die mittlere Beschleunigung größer ist.

1) $\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{9\,\mathrm{m/s}}{3\,\mathrm{s}} = 3\,\mathrm{m/s^2}$ ist die mittlere Beschleunigung im Zeitintervall $[0; 3]$.

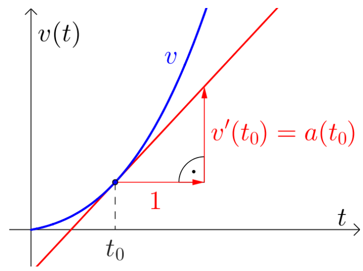
2) Die Sekante durch die Punkte $(0 \mid v(0))$ und $(2 \mid v(2))$ hat eine kleinere Steigung.
Also ist die mittlere Beschleunigung in $[0; 3]$ größer als in $[0; 2]$.

Beschleunigung-Zeit-Funktion

Die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v zum Zeitpunkt t_0 ist genau die Beschleunigung zu diesem Zeitpunkt.

Die **Ableitungsfunktion der Weg-Zeit-Funktion $\boldsymbol{v}$** ist also die **Beschleunigung-Zeit-Funktion $\boldsymbol{a}$**.

Kurz: $\boldsymbol{v'(t) = a(t)}$ bzw. $\boldsymbol{s''(t) = a(t)}$



Weg – Geschwindigkeit – Beschleunigung

Für eine Weg-Zeit-Funktion s gilt:

$$s(t) = -\frac{1}{24} \cdot t^4 + \frac{1}{3} \cdot t^3 + t^2 + 8 \cdot t$$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden, $0 \leq t \leq 3$
$s(t) \ldots$ zurückgelegter Weg in Metern im Zeitintervall $[0; t]$

1) Berechne die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ in km/h.

2) Berechne die minimale und die maximale Beschleunigung im Zeitintervall $[0; 3]$.

1) $v(t) = s'(t) = -\frac{1}{6} \cdot t^3 + t^2 + 2 \cdot t + 8 \implies v(0) = 8\,\mathrm{m/s} = 28{,}8\,\mathrm{km/h}$

2) $a(t) = v'(t) = -\frac{1}{2} \cdot t^2 + 2 \cdot t + 2$

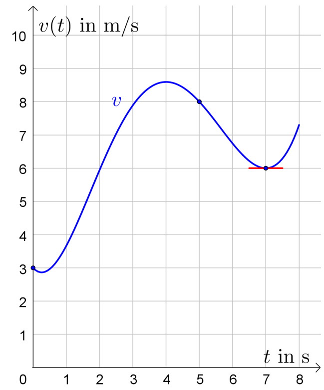
$a'(t) = -t + 2 = 0 \iff t = 2$

Also hat die Beschleunigung-Zeit-Funktion a nur zum Zeitpunkt $t = 2$ eine waagrechte Tangente. Der größte und der kleinste Funktionswert von a im Zeitintervall $[0; 3]$ liegt also entweder am Rand des Intervalls oder an der Stelle $t = 2$:

$a(0) = 2\,\mathrm{m/s^2} = a_{\min}$ (Randminimum)
$a(2) = 4\,\mathrm{m/s^2} = a_{\max}$
$a(3) = 3{,}5\,\mathrm{m/s^2}$

Änderungsmaße von Funktionen

David fährt mit dem Fahrrad einen Hügel bergab. Der Graph seiner Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v ist rechts im Zeitintervall $[0; 8]$ dargestellt.
Ermittle jeweils das angegebene Änderungsmaß von v,
und interpretiere das Ergebnis im Sachzusammenhang.



a) Absolute Änderung von v im Zeitintervall $[0; 5]$

b) Relative Änderung von v im Zeitintervall $[0; 5]$

c) Mittlere Änderungsrate von v im Zeitintervall $[0; 5]$

d) Momentane Änderungsrate von v zum Zeitpunkt $t = 7$

a) $v(5) - v(0) = 5\,\mathrm{m/s}$

David ist nach 5 Sekunden um $5\,\mathrm{m/s}$ schneller als zu Beginn.

b) $\dfrac{v(5) - v(0)}{v(0)} = \dfrac{5\,\mathrm{m/s}}{3\,\mathrm{m/s}} = \dfrac{5}{3} = 166{,}6...\,\%$

David ist nach 5 Sekunden um $166{,}6...\,\%$ schneller als zu Beginn.

c) $\dfrac{v(5) - v(0)}{5 - 0} = \dfrac{5\,\mathrm{m/s}}{5\,\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{m/s^2}$

Davids Geschwindigkeit wird im Zeitintervall $[0; 5]$ pro Sekunde *durchschnittlich* um $1\,\mathrm{m/s}$ größer.
Oder: David hat im Zeitintervall $[0; 5]$ die mittlere Beschleunigung $1\,\mathrm{m/s^2}$.

d) $v'(7) = a(7) = 0\,\mathrm{m/s^2}$

Davids Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 7$ ist $0\,\mathrm{m/s^2}$.

Newtonsches Abkühlungsgesetz

Ana legt eine Getränkeflasche in den Gefrierschrank mit konstanter Umgebungstemperatur $-20\,°\mathrm{C}$.
Zu diesem Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Getränketemperatur $22\,°\mathrm{C}$.
Für den zeitlichen Verlauf der Getränketemperatur gilt:

$$T(t) = a \cdot e^{-0{,}002 \cdot t} + b$$

$t \ldots$ Zeit in Minuten $(t \geq 0)$
$T(t) \ldots$ Getränketemperatur in °C zum Zeitpunkt t

1) Ermittle die Parameter a und b.

2) Berechne die momentane Änderungsrate der Getränketemperatur nach 2 Stunden.
Welche Einheit hat die momentane Änderungsrate von T?

1) Die Getränketemperatur nähert sich für $t \to \infty$ der Temperatur $-20\,°\mathrm{C}$ an.
$e^{-0{,}002 \cdot t} \to 0 \implies a \cdot 0 + b = -20 \implies b = -20$
$T(0) = a \cdot 1 + b = 22 \implies a = 22 - b = 42$

2) $T(t) = 42 \cdot e^{-0{,}002 \cdot t} - 20$

$\implies T'(t) = 42 \cdot e^{-0{,}002 \cdot t} \cdot (-0{,}002) = -0{,}084 \cdot e^{-0{,}002 \cdot t}$

$\implies T'(120) = -0{,}0660...\,°\mathrm{C/min}$