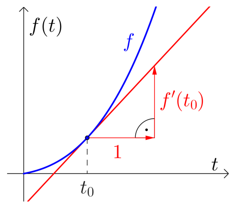
Momentane Änderungsrate

Rechts ist die Tangente an den Graphen einer Funktion f an der Stelle t_0 eingezeichnet.
Erinnere dich, dass der Differentialquotient

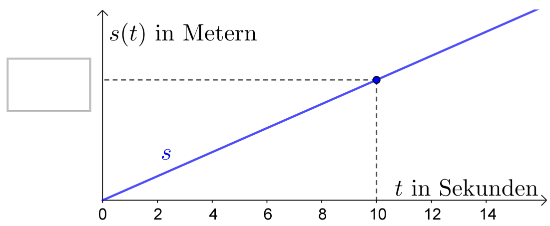


$$f'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

die lokale Änderungsrate – also die Steigung von f an der Stelle t_0 – misst.
Wenn t_0 ein Zeitpunkt ist, nennen wir die lokale Änderungsrate auch **momentane Änderungsrate**.

Konstante Geschwindigkeit

Wenn du mit der *konstanten* Geschwindigkeit $v = 3\,\text{m/s}$ läufst,
dann legst du pro Sekunde 3 Meter zurück,
also in t Sekunden insgesamt $3 \cdot t$ Meter.
Für die zugehörige Weg-Zeit-Funktion s gilt also:

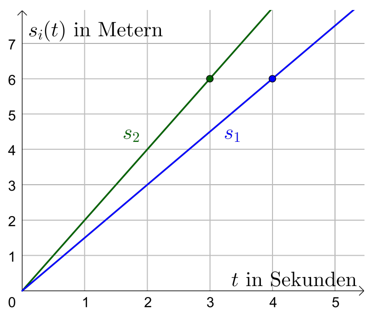


$$s(t) = 3 \cdot t$$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden
$s(t) \ldots$ zurückgelegter Weg in Metern im Zeitintervall $[0; t]$

Im Bild ist der Graph der linearen Funktion s dargestellt. Trage die richtige Zahl in das Kästchen ein.
Die konstante Steigung der Weg-Zeit-Funktion s ist also die konstante Geschwindigkeit v.

Konstante Geschwindigkeit



Lukas und Mario bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit.
Ihre Weg-Zeit-Funktionen s_1 und s_2 sind links grafisch dargestellt.

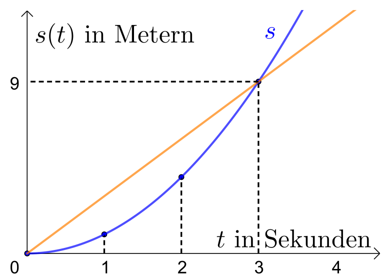
1) Ermittle die zugehörigen Geschwindigkeiten v_1 und v_2.

Ariana startet gleichzeitig und bewegt sich auch mit konstanter Geschwindigkeit. Ihre Geschwindigkeit liegt zwischen v_1 und v_2.

2) Zeichne einen möglichen Graphen ihrer Weg-Zeit-Funktion s_3 ein.

Mittlere Geschwindigkeit

Rechts ist eine nicht-lineare Weg-Zeit-Funktion s grafisch dargestellt.
Die Geschwindigkeit ist also *nicht* konstant.

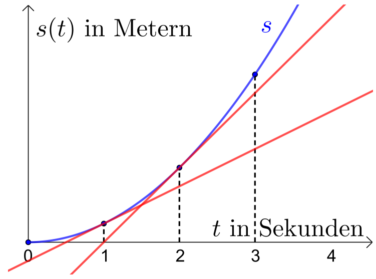


1) Berechne die Steigung der eingezeichneten Sekante.
Welche Einheit hat diese Steigung?
Welche physikalische Interpretation hat diese Steigung?

2) Begründe, in welchem der beiden Zeitintervalle $[0; 2]$ bzw. $[0; 3]$ die mittlere Geschwindigkeit größer ist.

Momentangeschwindigkeit

Rechts ist eine nicht-lineare Weg-Zeit-Funktion s grafisch dargestellt.
An den Stellen $t = 1$ und $t = 2$ ist jeweils die Tangente eingezeichnet.



1) Trage $<$, $=$ oder $>$ richtig in das Kästchen ein.

$$s'(1) \ \boxed{} \ s'(2)$$

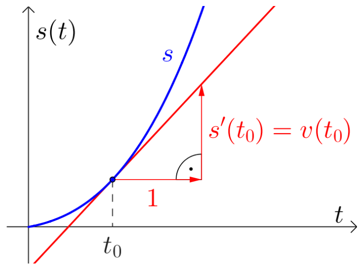
2) Welche Einheit haben $s'(1)$ und $s'(2)$? Hast du eine Vermutung, welche physikalische Interpretation diese Steigungen haben?

Geschwindigkeit-Zeit-Funktion

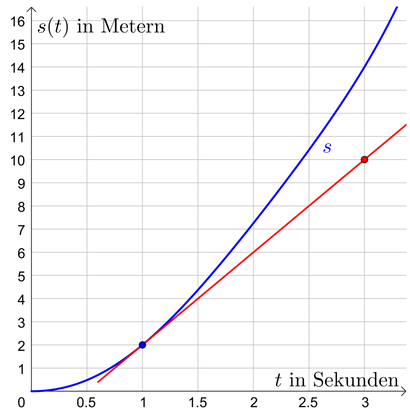
Die momentane Änderungsrate der Weg-Zeit-Funktion s zum Zeitpunkt t_0 ist genau die Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt.

Die **Ableitungsfunktion der Weg-Zeit-Funktion s** ist also die **Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v**.

Kurz: $\boldsymbol{s'(t) = v(t)}$



Momentangeschwindigkeit



Links ist eine Weg-Zeit-Funktion s grafisch dargestellt.
An der Stelle $t = 1$ ist die Tangente eingezeichnet.
Ermittle die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1$.

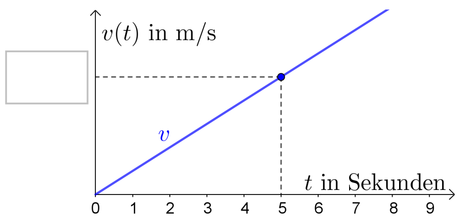
Konstante Beschleunigung

Ein Auto beschleunigt aus dem Stillstand mit der *konstanten* Beschleunigung $a = 6\,\mathrm{m/s^2}$.

Das heißt: Das Auto wird pro Sekunde um $6\,\mathrm{m/s}$ schneller.
Für die zugehörige Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v gilt also:

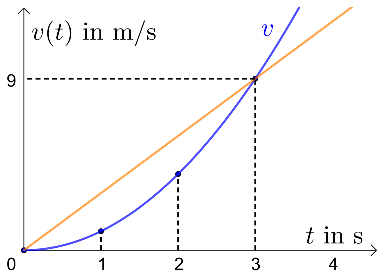
$$v(t) = 6 \cdot t$$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden
$v(t) \ldots$ Geschwindigkeit in $\mathrm{m/s}$ zum Zeitpunkt t



Rechts oben ist der Graph der linearen Funktion v dargestellt.
Trage die richtige Zahl in das Kästchen ein.
Die konstante Steigung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v ist also die konstante Beschleunigung a.

Mittlere Beschleunigung

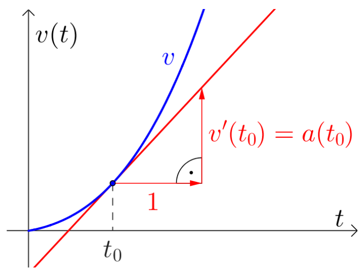


Rechts ist eine nicht-lineare Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v grafisch dargestellt. Die Beschleunigung ist also *nicht* konstant.

1) Berechne die Steigung der eingezeichneten Sekante.
Welche Einheit hat diese Steigung?
Welche physikalische Interpretation hat diese Steigung?

2) Begründe, in welchem der beiden Zeitintervalle $[0; 2]$ bzw. $[0; 3]$ die mittlere Beschleunigung größer ist.

Beschleunigung-Zeit-Funktion



Die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v zum Zeitpunkt t_0 ist genau die Beschleunigung zu diesem Zeitpunkt.

Die **Ableitungsfunktion der Weg-Zeit-Funktion $\boldsymbol{v}$** ist also die **Beschleunigung-Zeit-Funktion $\boldsymbol{a}$**.

Kurz: $\boldsymbol{v'(t) = a(t)}$ bzw. $\boldsymbol{s''(t) = a(t)}$

Weg – Geschwindigkeit – Beschleunigung

Für eine Weg-Zeit-Funktion s gilt:

$$s(t) = -\frac{1}{24} \cdot t^4 + \frac{1}{3} \cdot t^3 + t^2 + 8 \cdot t$$

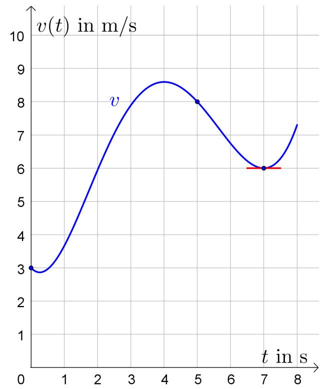
$t \ldots$ Zeit in Sekunden, $0 \leq t \leq 3$
$s(t) \ldots$ zurückgelegter Weg in Metern im Zeitintervall $[0; t]$

1) Berechne die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ in km/h.

2) Berechne die minimale und die maximale Beschleunigung im Zeitintervall $[0; 3]$.

Änderungsmaße von Funktionen

David fährt mit dem Fahrrad einen Hügel bergab. Der Graph seiner Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v ist rechts im Zeitintervall $[0; 8]$ dargestellt.
Ermittle jeweils das angegebene Änderungsmaß von v,
und interpretiere das Ergebnis im Sachzusammenhang.



a) Absolute Änderung von v im Zeitintervall $[0; 5]$

b) Relative Änderung von v im Zeitintervall $[0; 5]$

c) Mittlere Änderungsrate von v im Zeitintervall $[0; 5]$

d) Momentane Änderungsrate von v zum Zeitpunkt $t = 7$

Newtonsches Abkühlungsgesetz

Ana legt eine Getränkeflasche in den Gefrierschrank mit konstanter Umgebungstemperatur $-20\,°\text{C}$.
Zu diesem Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Getränketemperatur $22\,°\text{C}$.
Für den zeitlichen Verlauf der Getränketemperatur gilt:

$$T(t) = a \cdot e^{-0{,}002 \cdot t} + b$$

t … Zeit in Minuten ($t \geq 0$)
$T(t)$ … Getränketemperatur in °C zum Zeitpunkt t

1) Ermittle die Parameter a und b.

2) Berechne die momentane Änderungsrate der Getränketemperatur nach 2 Stunden.
Welche Einheit hat die momentane Änderungsrate von T?