

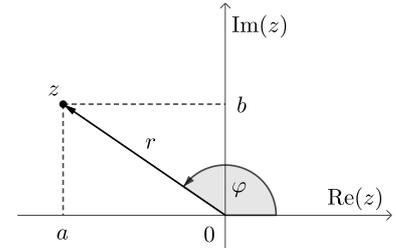


Wir können einen Punkt in der Zahlenebene bzw. eine **komplexe Zahl** auf 2 Arten *eindeutig* festlegen:

- Wir geben die beiden **Koordinaten** des Punkts an.

Bei komplexen Zahlen sind das also der Realteil a und der Imaginärteil b der komplexen Zahl $z = a + b \cdot i$.

Diese Darstellung $z = a + b \cdot i$ heißt **Komponentenform**.



- Wir geben den **Abstand** r vom Koordinatenursprung und den **Winkel** φ an, den der **Zeiger** zum Punkt und die positive horizontale Achse einschließen.

Diese Darstellung $z = (r; \varphi)$ heißt **Polarform**.

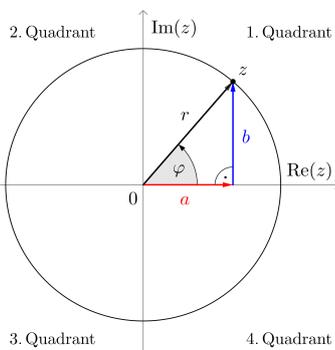
Der Abstand r heißt **Betrag** der komplexen Zahl, und wir schreiben: $r = |z|$

Der Winkel φ heißt **Argument** der komplexen Zahl.

Polarform \sim Komponentenform



Unten ist eine komplexe Zahl $z = a + b \cdot i$ im 1. Quadranten eingezeichnet.



- Stelle mithilfe von r und φ eine Formel für den Realteil a auf.

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{r} \implies a = r \cdot \cos(\varphi)$$

- Stelle mithilfe von r und φ eine Formel für den Imaginärteil b auf.

$$\sin(\varphi) = \frac{b}{r} \implies b = r \cdot \sin(\varphi)$$

Diese beiden Formeln gelten in allen 4 Quadranten, weil die **Winkelfunktionen am Einheitskreis** so definiert sind.

Polarform \sim Komponentenform



Wandle die komplexe Zahl $z = (5; 142^\circ)$ in Komponentenform um.

$$a = 5 \cdot \cos(142^\circ) = -3,94\dots$$

$$b = 5 \cdot \sin(142^\circ) = 3,07\dots$$

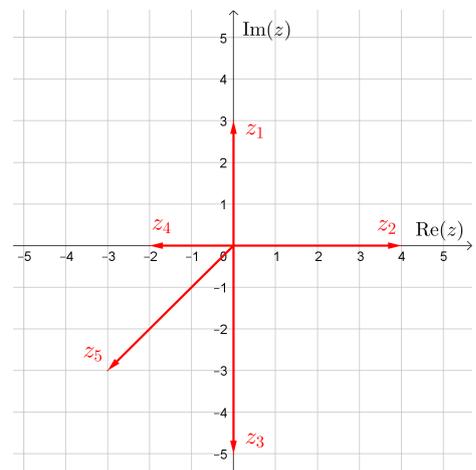
$$\implies z = -3,94\dots + 3,07\dots \cdot i$$

Komponentenform \sim Polarform (Spezialfälle)



Zeichne rechts jeweils den Zeiger zu der komplexen Zahl ein, und wandle die komplexe Zahl in Polarform um.

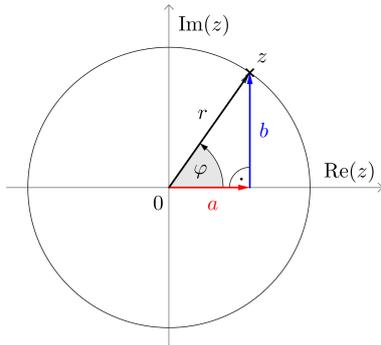
- $z_1 = 3 \cdot i = (3; 90^\circ)$
- $z_2 = 4 = (4; 0^\circ)$
- $z_3 = -5 \cdot i = (5; 270^\circ)$
- $z_4 = -2 = (2; 180^\circ)$
- $z_5 = -3 - 3 \cdot i = (\underbrace{\sqrt{3^2 + 3^2}}_{=4,242\dots}; 225^\circ)$



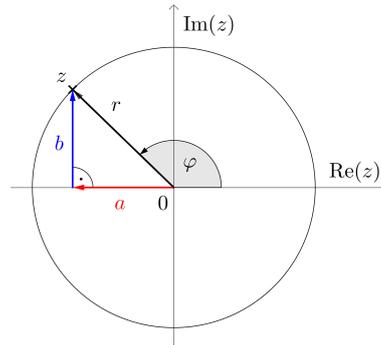


Der Realteil a und der Imaginärteil b einer komplexen Zahl sind bekannt. Setze jeweils $<$ oder $>$ ein:

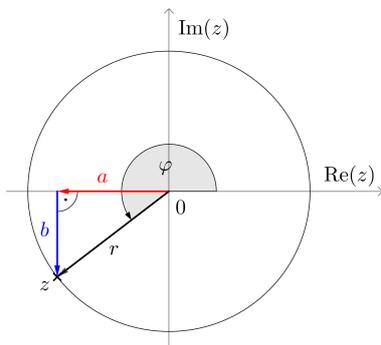
1. Quadrant: $a > 0$ und $b > 0$



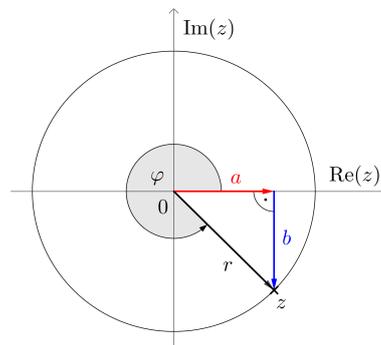
2. Quadrant: $a < 0$ und $b > 0$



3. Quadrant: $a < 0$ und $b < 0$



4. Quadrant: $a > 0$ und $b < 0$



Stelle mithilfe von a und b eine Formel für den Betrag r der komplexen Zahl auf:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Überlege dir in jedem Quadranten, welcher Winkel α mit

$$\alpha = \arctan\left(\left|\frac{b}{a}\right|\right)$$

berechnet wird. Stelle rechts mithilfe von α jeweils eine Formel für das Argument φ der komplexen Zahl auf.

$$\varphi = \begin{cases} \alpha & \text{im 1. Quadranten} \\ 180^\circ - \alpha & \text{im 2. Quadranten} \\ 180^\circ + \alpha & \text{im 3. Quadranten} \\ 360^\circ - \alpha & \text{im 4. Quadranten} \end{cases}$$

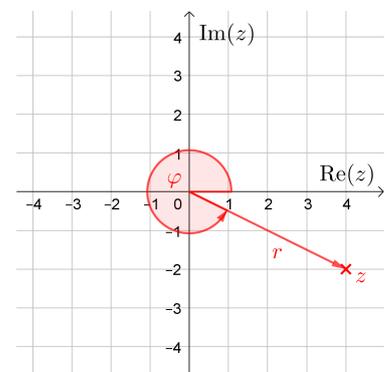


Zeichne die komplexe Zahl $z = 4 - 2 \cdot i$ rechts ein, und wandle sie in Polarform um.

$$r = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 4,472\dots$$

$$\varphi = 360^\circ - \arctan\left(\frac{2}{4}\right) = 333,4\dots^\circ \quad (\text{4. Quadrant})$$

$$z = (4,472\dots; 333,4\dots^\circ)$$



Eulersche Formel



Man kann die **Exponentialfunktion** $x \mapsto e^x$ auch für alle komplexen Zahlen x **definieren**. $e = 2,718\ 28\dots$

Dann gilt die **Eulersche Formel**: $e^{i \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ ($\varphi \in \mathbb{R}$ im **Bogenmaß**)

Daraus folgt für jede komplexe Zahl $z = a + b \cdot i = (r; \varphi)$ die Darstellung $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$, denn:

$$z = r \cdot \underbrace{\cos(\varphi)}_{=a} + r \cdot \underbrace{\sin(\varphi)}_{=b} \cdot i = r \cdot [\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)] = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$$

Eulersche Identität



Begründe, warum aus der Eulerschen Formel die **Eulersche Identität** $e^{i \cdot \pi} = -1$ folgt.

Diese Identität stellt einen „überraschend einfachen“ Zusammenhang zwischen den Zahlen/Konstanten e , i , π und 1 her.

$$e^{i \cdot \pi} = \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + i \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} = -1$$

Multiplikation und Division in Polarform



Gegeben sind zwei komplexe Zahlen $z_1 = (r_1; \varphi_1)$ und $z_2 = (r_2; \varphi_2)$ in Polarform.

- Beim Multiplizieren von z_1 und z_2 werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert:

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2; \varphi_1 + \varphi_2)$$

- Beim Dividieren von z_1 und z_2 werden die Beträge dividiert und die Winkel subtrahiert:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}; \varphi_1 - \varphi_2 \right)$$

Diese beiden Formeln kann man **elementar** aus den **Summensätzen für Winkelfunktionen** folgern oder

mithilfe der Eulerschen Formel aus den Darstellungen $z_1 = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1}$ und $z_2 = r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2}$ sowie den **Rechenregeln für Potenzen**.

Multiplikation und Division in Polarform



- a) Berechne $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$ für $z_1 = (10; 320^\circ)$ und $z_2 = (5; 70^\circ)$.

$$z_1 \cdot z_2 = (50; 390^\circ) = (50; 30^\circ) \qquad \frac{z_1}{z_2} = (2; 250^\circ)$$

- b) Berechne das Produkt in Polarform, und übersetze die Rechnung in Komponentenform.

$$\underbrace{(1; 90^\circ)}_{=i} \cdot \underbrace{(1; 90^\circ)}_{=i} = \underbrace{(1; 180^\circ)}_{=-1} \qquad i \cdot i = -1$$

Potenzieren in Polarform



Gegeben ist eine komplexe Zahl $z = (r; \varphi)$ in Polarform.

- 1) Erkläre, warum $z^2 = (r^2; 2 \cdot \varphi)$ gilt.

$$z^2 = (r; \varphi) \cdot (r; \varphi) = (r \cdot r; \varphi + \varphi) = (r^2; 2 \cdot \varphi) \checkmark$$

- 2) Erkläre, warum $z^n = (r^n; n \cdot \varphi)$ gilt.

$$z^n = \underbrace{(r; \varphi) \cdot (r; \varphi) \cdot \dots \cdot (r; \varphi)}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{(r \cdot r \cdot \dots \cdot r)}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(\varphi + \varphi + \dots + \varphi)}_{n \text{ Summanden}} = (r^n; n \cdot \varphi) \checkmark$$

Potenzieren in Polarform 

Berechne $(-6 + 8 \cdot i)^7$ und stelle das Ergebnis in Komponentenform sowie in Polarform dar.

Hinweis: Wandle zuerst $-6 + 8 \cdot i$ in Polarform um.

$z = -6 + 8 \cdot i$ in Polarform:

$$r = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \quad \varphi = 180^\circ - \arctan\left(\frac{8}{6}\right) = 126,8\dots^\circ$$

$(-6 + 8 \cdot i)^7$ in Polarform:

$$z^7 = (10^7; 7 \cdot 126,8\dots^\circ) = (10^7; 888,0\dots^\circ) = (10^7; 168,0\dots^\circ)$$

$(-6 + 8 \cdot i)^7$ in Komponentenform:

$$a = 10^7 \cdot \cos(168,0\dots^\circ) = -9\,784\,704$$

$$b = 10^7 \cdot \sin(168,0\dots^\circ) = 2\,063\,872 \quad \implies (-6 + 8 \cdot i)^7 = -9\,784\,704 + 2\,063\,872 \cdot i$$

Warum müssen der Realteil und der Imaginärteil von $(-6 + 8 \cdot i)^7$ ganze Zahlen sein?

Wurzelziehen 

Die Polynomgleichung $z^5 = (32; 150^\circ)$ hat über der Grundmenge \mathbb{C} genau 5 Lösungen.

Grad 5

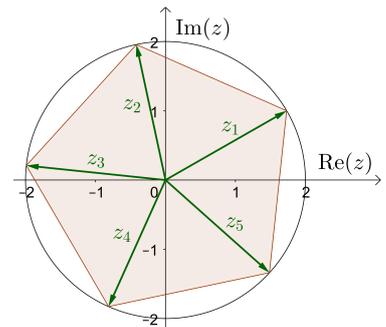
Jede Lösung ist eine komplexe Zahl $z = (r; \varphi)$ mit $z^5 = (r^5; 5 \cdot \varphi) = (32; 150^\circ)$.

1) Für den Betrag $r \in \mathbb{R}^+$ jeder Lösung muss also gelten:

$$r^5 = 32 \implies r = \sqrt[5]{32} = 2$$

2) Für das Argument φ der rechts dargestellten Lösung z_1 gilt:

$$5 \cdot \varphi = 150^\circ \implies \varphi = 30^\circ \implies z_1 = (2; 30^\circ)$$



3) Wenn wir das Argument φ von z_1 um $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ vergrößern, dann vergrößern wir das Argument von z_1^5 um $5 \cdot 72^\circ = 360^\circ$.

Oder:

$$5 \cdot \varphi = 150^\circ + k \cdot 360^\circ \iff \varphi = 30^\circ + k \cdot 72^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

So erhalten wir eine komplexe Zahl z_2 mit $z_1^5 = z_2^5$, also eine weitere Lösung von $z^5 = (32; 150^\circ)$.

$$\implies z_2 = (2; 102^\circ) \implies z_3 = (2; 174^\circ) \implies z_4 = (2; 246^\circ) \implies z_5 = (2; 318^\circ)$$

Zwei weitere Lösungen 

Berechne die Lösungen der Gleichung $z^3 = -8$ über der Grundmenge \mathbb{C} , und zeichne sie rechts in der Zahlenebene ein.

Grad 3

Polarform: $-8 = (8; 180^\circ)$

$$z_1 = \left(\sqrt[3]{8}; \frac{180^\circ}{3}\right) = (2; 60^\circ)$$

$$z_2 = \left(2; 60^\circ + \frac{360^\circ}{3}\right) = (2; 180^\circ) = -2$$

$$z_3 = (2; 180^\circ + 120^\circ) = (2; 300^\circ)$$

