



Wir können einen Punkt in der Zahlenebene bzw. eine **komplexe Zahl** auf 2 Arten *eindeutig* festlegen:

- Wir geben die beiden **Koordinaten** des Punkts an.

Bei komplexen Zahlen sind das also der Realteil a und der Imaginärteil b der komplexen Zahl $z = a + b \cdot i$.

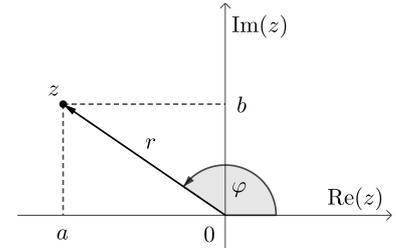
Diese Darstellung $z = a + b \cdot i$ heißt **Komponentenform**.

- Wir geben den **Abstand** r vom Koordinatenursprung und den **Winkel** φ an, den der **Zeiger** zum Punkt und die positive horizontale Achse einschließen.

Diese Darstellung $z = (r; \varphi)$ heißt **Polarform**.

Der Abstand r heißt **Betrag** der komplexen Zahl, und wir schreiben: $r = |z|$

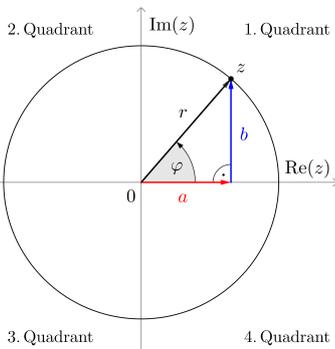
Der Winkel φ heißt **Argument** der komplexen Zahl.



Polarform \sim Komponentenform



Unten ist eine komplexe Zahl $z = a + b \cdot i$ im 1. Quadranten eingezeichnet.



- Stelle mithilfe von r und φ eine Formel für den Realteil a auf.

- Stelle mithilfe von r und φ eine Formel für den Imaginärteil b auf.

Diese beiden Formeln gelten in allen 4 Quadranten, weil die **Winkelfunktionen am Einheitskreis** so definiert sind.

Polarform \sim Komponentenform



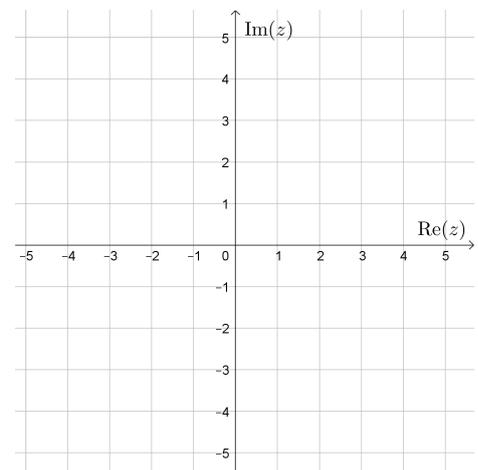
Wandle die komplexe Zahl $z = (5; 142^\circ)$ in Komponentenform um.

Komponentenform \sim Polarform (Spezialfälle)



Zeichne rechts jeweils den Zeiger zu der komplexen Zahl ein, und wandle die komplexe Zahl in Polarform um.

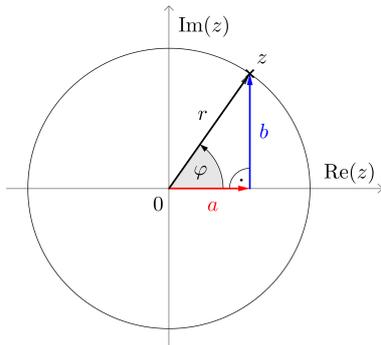
- $z_1 = 3 \cdot i =$
- $z_2 = 4 =$
- $z_3 = -5 \cdot i =$
- $z_4 = -2 =$
- $z_5 = -3 - 3 \cdot i =$



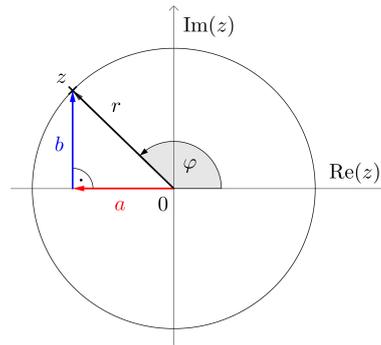


Der Realteil a und der Imaginärteil b einer komplexen Zahl sind bekannt. Setze jeweils $<$ oder $>$ ein:

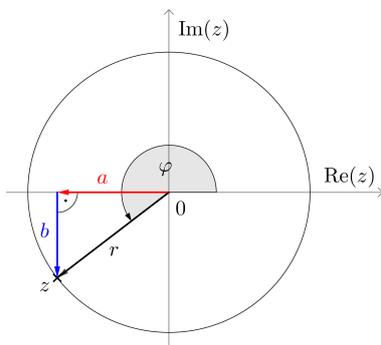
1. Quadrant: $a \square 0$ und $b \square 0$



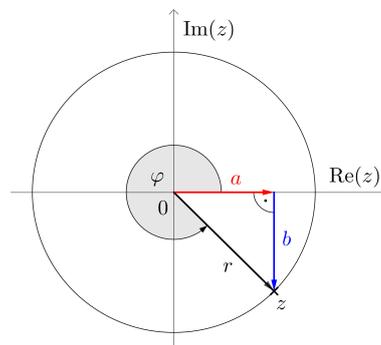
2. Quadrant: $a \square 0$ und $b \square 0$



3. Quadrant: $a \square 0$ und $b \square 0$



4. Quadrant: $a \square 0$ und $b \square 0$



Stelle mithilfe von a und b eine Formel für den Betrag r der komplexen Zahl auf:

$r =$

Überlege dir in jedem Quadranten, welcher Winkel α mit

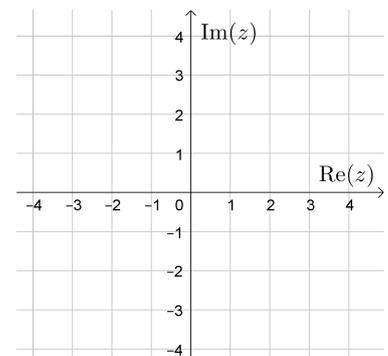
$$\alpha = \arctan \left(\left| \frac{b}{a} \right| \right)$$

berechnet wird. Stelle rechts mithilfe von α jeweils eine Formel für das Argument φ der komplexen Zahl auf.

$\varphi =$ im 1. Quadranten
 im 2. Quadranten
 im 3. Quadranten
 im 4. Quadranten



Zeichne die komplexe Zahl $z = 4 - 2 \cdot i$ rechts ein, und wandle sie in Polarform um.



Eulersche Formel



MmF

Man kann die **Exponentialfunktion** $x \mapsto e^x$ auch für alle komplexen Zahlen x definieren. $e = 2,71828\dots$

Dann gilt die **Eulersche Formel**: $e^{i \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ ($\varphi \in \mathbb{R}$ im Bogenmaß)

Daraus folgt für jede komplexe Zahl $z = a + b \cdot i = (r; \varphi)$ die Darstellung $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$, denn:

$$z = r \cdot \underbrace{\cos(\varphi)}_{=a} + r \cdot \underbrace{\sin(\varphi)}_{=b} \cdot i = r \cdot [\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)] = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$$

Eulersche Identität



MmF

Begründe, warum aus der Eulerschen Formel die **Eulersche Identität** $e^{i \cdot \pi} = -1$ folgt.

Diese Identität stellt einen „überraschend einfachen“ Zusammenhang zwischen den Zahlen/Konstanten e , i , π und 1 her.

Multiplikation und Division in Polarform



MmF

Gegeben sind zwei komplexe Zahlen $z_1 = (r_1; \varphi_1)$ und $z_2 = (r_2; \varphi_2)$ in Polarform.

- Beim Multiplizieren von z_1 und z_2 werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert:

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2; \varphi_1 + \varphi_2)$$

- Beim Dividieren von z_1 und z_2 werden die Beträge dividiert und die Winkel subtrahiert:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}; \varphi_1 - \varphi_2 \right)$$

Diese beiden Formeln kann man **elementar** aus den **Summensätzen für Winkelfunktionen** folgern oder mithilfe der Eulerschen Formel aus den Darstellungen $z_1 = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1}$ und $z_2 = r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2}$ sowie den **Rechenregeln für Potenzen**.

Multiplikation und Division in Polarform



MmF

a) Berechne $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$ für $z_1 = (10; 320^\circ)$ und $z_2 = (5; 70^\circ)$.

b) Berechne das Produkt in Polarform, und übersetze die Rechnung in Komponentenform.

$$(1; 90^\circ) \cdot (1; 90^\circ) =$$

Potenzieren in Polarform



MmF

Gegeben ist eine komplexe Zahl $z = (r; \varphi)$ in Polarform.

1) Erkläre, warum $z^2 = (r^2; 2 \cdot \varphi)$ gilt.

2) Erkläre, warum $z^n = (r^n; n \cdot \varphi)$ gilt.

Potenzieren in Polarform 

Berechne $(-6 + 8 \cdot i)^7$ und stelle das Ergebnis in Komponentenform sowie in Polarform dar.

Hinweis: Wandle zuerst $-6 + 8 \cdot i$ in Polarform um.

Warum müssen der Realteil und der Imaginärteil von $(-6 + 8 \cdot i)^7$ ganze Zahlen sein?

Wurzelziehen 

Die Polynomgleichung $z^5 = (32; 150^\circ)$ hat über der Grundmenge \mathbb{C} genau 5 Lösungen. Grad 5

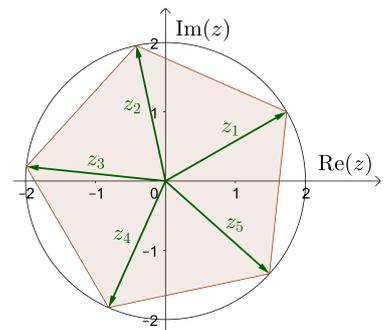
Jede Lösung ist eine komplexe Zahl $z = (r; \varphi)$ mit $z^5 = (r^5; 5 \cdot \varphi) = (32; 150^\circ)$.

1) Für den Betrag $r \in \mathbb{R}^+$ jeder Lösung muss also gelten:

$$r^5 = 32 \implies r = \boxed{}$$

2) Für das Argument φ der rechts dargestellten Lösung z_1 gilt:

$$5 \cdot \varphi = 150^\circ \implies \varphi = \boxed{} \implies z_1 = \boxed{}$$



3) Wenn wir das Argument φ von z_1 um $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ vergrößern,

dann vergrößern wir das Argument von z_1^5 um $\boxed{}$.

Oder:

$$5 \cdot \varphi = 150^\circ + k \cdot 360^\circ \iff \varphi = 30^\circ + k \cdot 72^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

So erhalten wir eine komplexe Zahl z_2 mit $z_1^5 = z_2^5$, also eine weitere Lösung von $z^5 = (32; 150^\circ)$.

$$\implies z_2 = \boxed{} \implies z_3 = \boxed{} \implies z_4 = \boxed{} \implies z_5 = \boxed{}$$

Zwei weitere Lösungen 

Berechne die Lösungen der Gleichung $z^3 = -8$ über der Grundmenge \mathbb{C} , und zeichne sie rechts in der Zahlenebene ein. Grad 3

