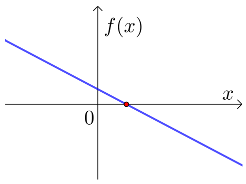
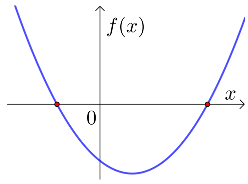
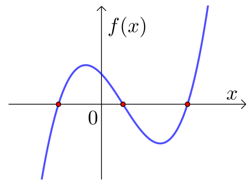
Polynomfunktionen

Polynomfunktion (Grad 1)	Polynomfunktion (Grad 2)	Polynomfunktion (Grad 3)
$f(x) = a_1 \cdot x + a_0$ $a_1 \neq 0,\ a_i \in \mathbb{R}$  $1 \leq$ Anzahl reeller Nullstellen ≤ 1 Lineare Funktion mit Steigung $\neq 0$	$f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ $a_2 \neq 0,\ a_i \in \mathbb{R}$  $0 \leq$ Anzahl reeller Nullstellen ≤ 2 Quadratische Funktion	$f(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ $a_3 \neq 0,\ a_i \in \mathbb{R}$  $1 \leq$ Anzahl reeller Nullstellen ≤ 3 Kubische Funktion

Jede Funktion f mit

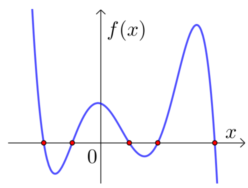
$$\boldsymbol{f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0} \quad \text{mit} \quad n \geq 0,\ a_n \neq 0$$

heißt **Polynomfunktion**. Die reellen Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ heißen **Koeffizienten**.

Der größte auftretende Exponent n heißt **Grad** der Polynomfunktion.

Der Grad einer Polynomfunktion gibt an, wie viele reelle Nullstellen sie *höchstens* haben kann.

Rechts ist der Graph einer Polynomfunktion vom Grad 5 dargestellt. Bei dieser Funktion sind alle 5 Nullstellen reelle Zahlen.



Mehr zu Nullstellen, die *keine* reellen Zahlen sind, findest du am Arbeitsblatt – Komplexe Zahlen.

Polynomgleichungen lösen

1) Die Nullstelle jeder Polynomfunktion vom Grad 1 können wir systematisch berechnen.
Berechne die Nullstelle der linearen Funktion f mit $f(x) = -2 \cdot x + 8$.

$$-2 \cdot x + 8 = 0 \iff 8 = 2 \cdot x \iff x = 4$$

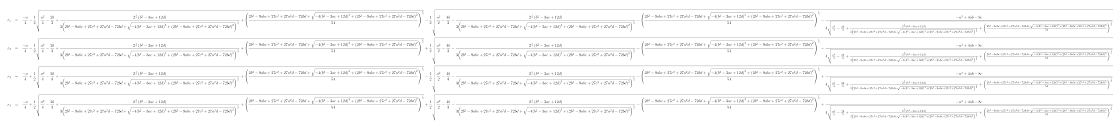
2) Die Nullstelle(n) jeder Polynomfunktion vom Grad 2 können wir systematisch berechnen.
Berechne die Nullstellen der quadratischen Funktion g mit $g(x) = 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 16$.

$$2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 16 = 0 \iff x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 128}}{4} = \frac{-4 \pm 12}{4}$$

$$x_1 = -4,\ x_2 = 2$$

Lösungsformeln

Seit etwa 500 Jahren kennt man Lösungsformeln für Polynomgleichungen vom Grad 3 bzw. Grad 4.



Seit etwa 200 Jahren ist bekannt, dass es ab Grad 5 keine allgemeine Lösungsformel geben kann.

Haben die Gleichungen besondere Strukturen, kann man sie trotzdem exakt lösen. Ansonsten kann man die Lösungen annähern.

Substitution

Die Polynomfunktion f mit $f(x) = x^6 - 7 \cdot x^3 - 8$ hat den Grad 6.

Gesucht sind alle reellen Nullstellen von f. Die zugehörige Gleichung

$$x^6 - 7 \cdot x^3 - 8 = 0$$

hat eine besondere Struktur, nämlich

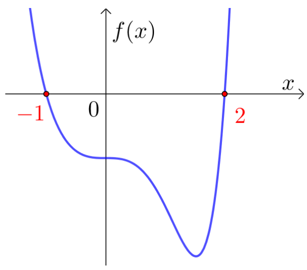
$$u^2 - 7 \cdot u - 8 = 0$$

mit $u = x^3$. Löse diese quadratische Gleichung in u. So eine Ersetzung heißt auch **Substitution**.

$$u_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 8} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{9}{2}$$

Die Gleichung $u^2 - 7 \cdot u - 8 = 0$ hat die 2 Lösungen $u_1 = -1$ und $u_2 = 8$.

Setze in $u = x^3$ ein, um die Nullstellen von f zu berechnen.



Die Gleichung $-1 = x^3$ hat eine Lösung in $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \sqrt[3]{-1} = -1$$

Die Gleichung $8 = x^3$ hat eine Lösung in $\mathbb{R}$:

$$x_2 = \sqrt[3]{8} = 2$$

Die Polynomfunktion f hat also die reellen Nullstellen -1 und 2.

Produkt-Null-Satz

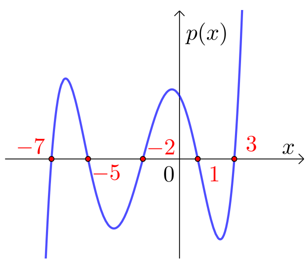
Die Polynomfunktion p mit $p(x) = 42 \cdot (x+7) \cdot (x^2 - x - 6) \cdot (x^2 + 4 \cdot x - 5)$ hat den Grad 5.

Gesucht sind alle reellen Nullstellen von p. Die zugehörige Gleichung hat eine besondere Struktur:

$$42 \cdot (x+7) \cdot (x^2 + 4 \cdot x - 5) \cdot (x^2 - x - 6) = 0$$

Produkt-Null-Satz: „*Ein Produkt ist genau dann* 0*, wenn mindestens ein Faktor* 0 *ist.*“
Berechne damit alle Lösungen der Gleichung.

$$x + 7 = 0 \iff x = -7$$



$$x^2 + 4 \cdot x - 5 = 0 \iff x = -2 \pm \sqrt{4+5} = -2 \pm 3$$
$$\iff x = -5 \quad \text{oder} \quad x = 1$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \iff x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$
$$\iff x = -2 \quad \text{oder} \quad x = 3$$

Die Polynomfunktion p hat also die reellen Nullstellen -7, -5, -2, 1 und 3.

Nullstelle 0

Die Polynomfunktion h mit $h(x) = 2 \cdot x^5 - 4 \cdot x^4 - 30 \cdot x^3$ hat den Grad 5.

Gesucht sind alle reellen Nullstellen von h. Die zugehörige Gleichung

$$2 \cdot x^5 - 4 \cdot x^4 - 30 \cdot x^3 = 0$$

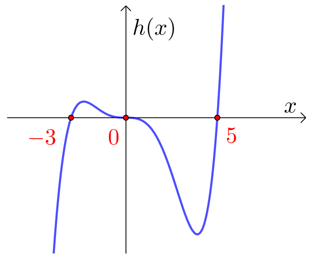
hat eine besondere Struktur, weil 0 eine Lösung ist. Wir können herausheben:

$$2 \cdot x^5 - 4 \cdot x^4 - 30 \cdot x^3 = x^3 \cdot \left(2 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 30\right) = 0$$

Berechne damit alle Lösungen der Gleichung.

$$x^3 = 0 \iff x = 0$$

$$2 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 30 = 0 \iff x^2 - 2 \cdot x - 15 = 0$$
$$\iff x = 1 \pm \sqrt{1 + 15} = 1 \pm 4$$
$$\iff x = -3 \quad \text{oder} \quad x = 5$$



Die Polynomfunktion h hat also die reellen Nullstellen -3, 0 und 5.

Nullstellen → Gleichung

Stelle die Gleichung einer Polynomfunktion f auf, die genau die Nullstellen -7, 0 und 3 hat.

Hinweis: Verwende den Produkt-Null-Satz.

Zum Beispiel:

$$f(x) = (x + 7) \cdot x \cdot (x - 3)$$

Zerlegung in Linearfaktoren

a) Die unten angegebene Polynomfunktion f vom Grad 3 hat die Nullstellen -5, -3 und $\frac{1}{2}$.
Ermittle ihre **Zerlegung in Linearfaktoren**.
Trage dazu Rechenzeichen und Zahlen richtig in die Kästchen ein.

$$f(x) = -2 \cdot x^3 - 15 \cdot x^2 - 22 \cdot x + 15 = -2 \cdot \left(x + 5\right) \cdot \left(x + 3\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

b) Die unten angegebene Polynomfunktion g vom Grad 3 hat die Nullstellen 2, 3 und n.
Vervollständige mithilfe von n die Zerlegung in Linearfaktoren, und ermittle n.

$$g(x) = x^3 - 12 \cdot x^2 + 41 \cdot x - 42 = 1 \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - n)$$

$$-42 = 1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-n) \iff n = 7$$

Teiler

Die Polynomfunktion f vom Grad 3 hat die Nullstellen x_1, x_2 und x_3.

$$f(x) = 2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 34 \cdot x + 30 = 2 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

Angenommen du weißt, dass alle 3 Nullstellen x_1, x_2 und x_3 ganze Zahlen sind.
Welche Nullstellen kommen wegen des Koeffizienten 30 dann nur mehr in Frage?

$$2 \cdot (-x_1) \cdot (-x_2) \cdot (-x_3) = 30 \iff x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -15$$

Wenn x_1, x_2 und x_3 ganze Zahlen sind, müssen sie alle Teiler von 15 sein, also ± 1, ± 3, ± 5 oder ± 15.

Ermittle aus diesen (endlich vielen) Möglichkeiten die 3 Nullstellen von f.

$$x = 1 \implies 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 34 \cdot 1 + 30 = 0 \checkmark \implies x_1 = 1$$

$$x = 3 \implies 2 \cdot 27 + 2 \cdot 9 - 34 \cdot 3 + 30 = 0 \checkmark \implies x_2 = 3$$

Die dritte Nullstelle muss $x_3 = \frac{-15}{1 \cdot 3} = -5$ sein.

Abspaltung von Linearfaktoren

Gesucht sind die Nullstellen x_1, x_2 und x_3 der folgenden Polynomfunktion f vom Grad 3:

$$f(x) = 8 \cdot x^3 - 38 \cdot x^2 + 23 \cdot x + 42$$

1) Überprüfe, dass $x_1 = 2$ eine Nullstelle von f ist.

$$f(2) = 8 \cdot 2^3 - 38 \cdot 2^2 + 23 \cdot 2 + 42 = 0 \checkmark$$

2) Zerlege in Linearfaktoren.

$$8 \cdot x^3 - 38 \cdot x^2 + 23 \cdot x + 42 = 8 \cdot (x - 2) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = 0 \qquad (\star)$$

3) Dividiere $(\star)$ durch $(x - 2)$.

Mehr dazu findest du am Arbeitsblatt – Polynomdivision.

$$\begin{array}{l}
\ominus \left\{ \begin{array}{l} (8 \cdot x^3 - 38 \cdot x^2 + 23 \cdot x + 42) : (x - 2) = 8 \cdot x^2 - 22 \cdot x - 21 \\ 8 \cdot x^3 - 16 \cdot x^2 \end{array} \right. \\
\hline
\quad \ominus \left\{ \begin{array}{l} -22 \cdot x^2 + 23 \cdot x + 42 \\ -22 \cdot x^2 + 44 \cdot x \end{array} \right. \\
\hline
\qquad \ominus \left\{ \begin{array}{l} -21 \cdot x + 42 \\ -21 \cdot x + 42 \end{array} \right. \\
\hline
\qquad\qquad 0 \text{ Rest}
\end{array}$$

$$\overset{(\star)}{\implies} 8 \cdot x^2 - 22 \cdot x - 21 = 8 \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = 0$$

4) Berechne die Lösungen x_2 und x_3 der quadratischen Gleichung $8 \cdot x^2 - 22 \cdot x - 21 = 0$.

$$x_{2,3} = \frac{22 \pm \sqrt{484 + 672}}{16} = \frac{22 \pm 34}{16} \implies x_2 = \frac{56}{16} = \frac{7}{2}, \quad x_3 = \frac{-12}{16} = -\frac{3}{4}$$

$$\implies f(x) = 8 \cdot \left(x - 2\right) \cdot \left(x - \frac{7}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{3}{4}\right)$$