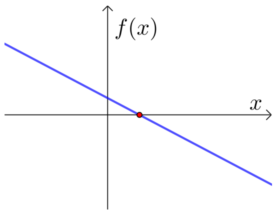
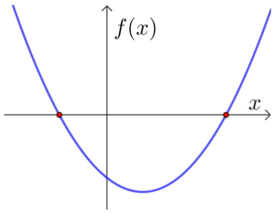
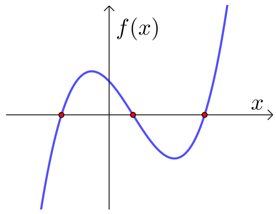
Polynomfunktionen

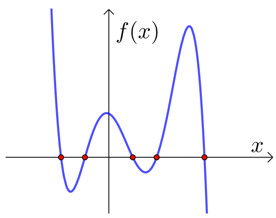
Lineare Funktionen	**Quadratische Funktionen**	**Kubische Funktionen**
$f(x) = a_1 \cdot x + a_0$	$f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$	$f(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$
$a_1 \neq 0$	$a_2 \neq 0$	$a_3 \neq 0$
		
$1 \leq$ Anzahl Nullstellen ≤ 1	$0 \leq$ Anzahl Nullstellen ≤ 2	$1 \leq$ Anzahl Nullstellen ≤ 3

Jede Funktion mit einer Gleichung der Form

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \quad \text{mit} \quad n \geq 0,\ a_n \neq 0$$

heißt **Polynomfunktion**. Der größte auftretende Exponent $\boldsymbol{n}$ heißt **Grad** der Polynomfunktion.
Die Zahl $\boldsymbol{a_n}$ heißt auch **führender Koeffizient**. Der Term $a_n \cdot x^n$ legt das Verhalten von $f(x)$ fest, wenn $x \to \pm\infty$.

Der Graph einer Polynomfunktion vom Grad 5 ist rechts dargestellt.



Der **Fundamentalsatz der Algebra** besagt, dass jede Polynomfunktion vom Grad n mit $n \geq 1$ höchstens n reelle Nullstellen hat.

Mehr dazu erfährst du im Kompetenzheft – Komplexe Zahlen.

Polynomgleichungen lösen

1) Die Nullstelle jeder **linearen Funktion** können wir systematisch berechnen.
Berechne die Nullstelle von $f(x) = -2 \cdot x + 8$. Mehr dazu erfährst du im KH – Lineare Funktionen.

$$-2 \cdot x + 8 = 0 \iff 8 = 2 \cdot x \iff x = \frac{8}{2} = 4$$

2) Die Nullstelle(n) jeder **quadratischen Funktion** können wir systematisch berechnen.
Berechne die Nullstellen von $g(x) = 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 16$. Mehr dazu erfährst du im KH – Quadratische Funktionen.

$$2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 16 = 0 \iff x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 128}}{4} = \frac{-4 \pm 12}{4}$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = -4$$

Lösungsformeln

Seit etwa 500 Jahren kennt man Lösungsformeln für Polynomgleichungen vom Grad 3 bzw. Grad 4.
Seit etwa 200 Jahren ist bekannt, dass es ab Grad 5 keine allgemeine Lösungsformel geben kann.

Substitution

Die Polynomfunktion f mit $f(x) = x^6 - 7 \cdot x^3 - 8$ hat Grad 6.

Gesucht sind alle reellen Nullstellen von f. Die zugehörige Gleichung

$$x^6 - 7 \cdot x^3 - 8 = 0$$

hat eine besondere Struktur, nämlich

$$u^2 - 7 \cdot u - 8 = 0$$

mit $u = x^3$. Löse diese quadratische Gleichung in u.

So eine Ersetzung heißt auch **Substitution**.

$$u_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 8} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{9}{2}$$

Die Gleichung $u^2 - 7 \cdot u - 8 = 0$ hat die 2 Lösungen $u_1 = 8$ und $u_2 = -1$.

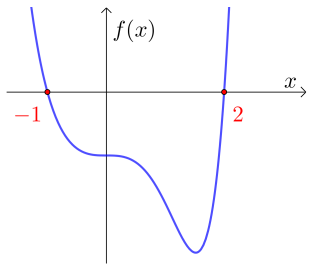
Berechne die beiden Nullstellen von f, und beschrifte sie in der nebenstehenden Abbildung.

Die Gleichung $8 = x^3$ hat eine Lösung in $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \sqrt[3]{8} = 2$$

Die Gleichung $-1 = x^3$ hat eine Lösung in $\mathbb{R}$:

$$x_2 = \sqrt[3]{-1} = -1$$



Produkt-Null-Satz

Die Polynomfunktion p mit $p(x) = 42 \cdot (x+7) \cdot (x^2 - x - 6) \cdot (x^2 + 4 \cdot x - 5)$ hat Grad 5.

Gesucht sind alle reellen Nullstellen von p. Die zugehörige Gleichung hat eine besondere Struktur:

$$42 \cdot (x+7) \cdot (x^2 + 4 \cdot x - 5) \cdot (x^2 - x - 6) = 0$$

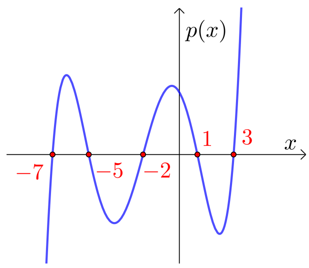
Produkt-Null-Satz: *„Ein Produkt ist genau dann 0, wenn mindestens ein Faktor 0 ist."*

Berechne damit alle Lösungen der Gleichung.

$$x + 7 = 0 \iff x = -7$$

$$x^2 + 4 \cdot x - 5 = 0 \iff x = -2 \pm \sqrt{4+5} = -2 \pm 3$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \iff x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$



Die Polynomfunktion p hat also die Nullstellen -7, -5, 1, 3 und -2.

Nullstelle 0

Die Polynomfunktion h mit $h(x) = 2 \cdot x^5 - 4 \cdot x^4 - 30 \cdot x^3$ hat Grad 5.

Gesucht sind alle reellen Nullstellen von h. Die zugehörige Gleichung

$$2 \cdot x^5 - 4 \cdot x^4 - 30 \cdot x^3 = 0$$

hat eine besondere Struktur, weil 0 eine Lösung ist. Wir können herausheben:

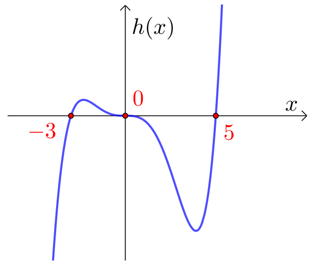
$$2 \cdot x^5 - 4 \cdot x^4 - 30 \cdot x^3 = x^3 \cdot \left(2 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 30\right) = 0$$

Berechne damit alle Lösungen der Gleichung.

$$x^3 = 0 \iff x = 0$$

$$2 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 30 = 0 \iff x^2 - 2 \cdot x - 15 = 0 \iff$$

$$\iff x = 1 \pm \sqrt{1 + 15} = 1 \pm 4$$



Die Polynomfunktion h hat also die Nullstellen 0, 5 und -3.

Nullstellen → Gleichung

Stelle die Gleichung einer Polynomfunktion f auf, die genau die Nullstellen -7, 0 und 3 hat.

Hinweis: Produkt-Null-Satz

Zum Beispiel:

$$f(x) = (x + 7) \cdot x \cdot (x - 3)$$

Zerlegung in Linearfaktoren

Die kubische Polynomfunktion f hat die Nullstellen -5, -3 und $\frac{1}{2}$.
Ergänze die fehlenden Zahlen in der Funktionsgleichung von f:

$$f(x) = -2 \cdot x^3 - 15 \cdot x^2 - 22 \cdot x + 15 = -2 \cdot \big(x - (-5)\big) \cdot \big(x - (-3)\big) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Die rechte Seite heißt auch **Zerlegung in Linearfaktoren**.

Die kubische Polynomfunktion g hat die Nullstellen 2, 3 und n.
Fülle die Lücken in der Funktionsgleichung aus, und ermittle n:

$$g(x) = x^3 - 12 \cdot x^2 + 41 \cdot x - 42 = 1 \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - n)$$

Hinweis: 42

$$-42 = 1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-n) \iff n = 7$$

Teiler

Die kubische Polynomfunktion f hat die Nullstellen x_1, x_2 und x_3.

$$f(x) = 2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 34 \cdot x + 30 = 2 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

Angenommen du weißt, dass alle 3 Nullstellen x_1, x_2 und x_3 ganze Zahlen sind.
Welche Nullstellen kommen dann mit dem konstanten Koeffizienten 30 von f nur in Frage?

$$2 \cdot (-x_1) \cdot (-x_2) \cdot (-x_3) = 30 \iff -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 15$$

Wenn x_1, x_2 und x_3 ganze Zahlen sind, müssen sie alle Teiler von 15 sein, also ± 1, ± 3, ± 5 oder ± 15.

Ermittle damit alle 3 Nullstellen von f. Trial and Error

$$x = 1 \implies 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 34 \cdot 1 + 30 = 0 \checkmark \implies x_1 = 1$$

$$x = 3 \implies 2 \cdot 27 + 2 \cdot 9 - 34 \cdot 3 + 30 = 0 \checkmark \implies x_2 = 3$$

Die dritte Nullstelle muss $x_3 = \frac{15}{-1 \cdot 3} = -5$ sein.

Abspaltung von Linearfaktoren

Gesucht sind die Nullstellen x_1, x_2 und x_3 der kubischen Polynomfunktion f mit

$$f(x) = 8 \cdot x^3 - 38 \cdot x^2 + 23 \cdot x + 42.$$

1) Überprüfe, dass $x_1 = 2$ eine Nullstelle von f ist.

$$f(2) = 8 \cdot 2^3 - 38 \cdot 2^2 + 23 \cdot 2 + 42 = 0 \checkmark$$

2) Zerlege in Linearfaktoren.

$$8 \cdot x^3 - 38 \cdot x^2 + 23 \cdot x + 42 = 8 \cdot (x - 2) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = 0$$

3) Dividiere durch $(x - 2)$. Mehr dazu erfährst du am Arbeitsblatt – Polynomdivision.

$$\begin{array}{l} \ominus \left\{ \begin{array}{l} (8 \cdot x^3 - 38 \cdot x^2 + 23 \cdot x + 42) : (x - 2) = 8 \cdot x^2 - 22 \cdot x - 21 \\ 8 \cdot x^3 - 16 \cdot x^2 \end{array} \right. \\ \hline \quad \ominus \left\{ \begin{array}{l} -22 \cdot x^2 + 23 \cdot x + 42 \\ -22 \cdot x^2 + 44 \cdot x \end{array} \right. \\ \hline \qquad \ominus \left\{ \begin{array}{l} -21 \cdot x + 42 \\ -21 \cdot x + 42 \end{array} \right. \\ \hline \qquad\qquad 0 \text{ Rest} \end{array}$$

Gesucht sind also die Lösungen x_2 und x_3 von $8 \cdot x^2 - 22 \cdot x - 21 = 8 \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = 0$.

4) Berechne die Lösungen x_2 und x_3 der quadratischen Gleichung $8 \cdot x^2 - 22 \cdot x - 21 = 0$.

$$x_{2,3} = \frac{22 \pm \sqrt{484 + 672}}{16} = \frac{22 \pm 34}{16} \implies x_2 = \frac{56}{16} = \frac{7}{2}, \quad x_3 = \frac{-12}{16} = -\frac{3}{4}$$

$$\implies f(x) = 8 \cdot \left(x - 2\right) \cdot \left(x - \frac{7}{2}\right) \cdot \left(x - \left(-\frac{3}{4}\right)\right)$$