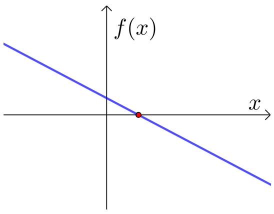
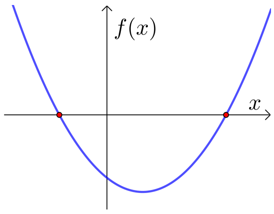
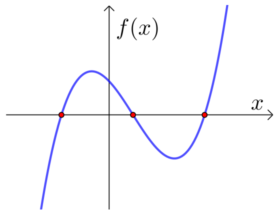
Polynomfunktionen

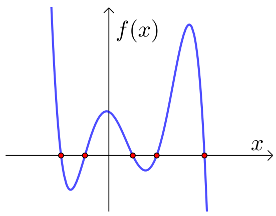
Lineare Funktionen	Quadratische Funktionen	Kubische Funktionen
$f(x) = a_1 \cdot x + a_0$	$f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$	$f(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$
$a_1 \neq 0$	$a_2 \neq 0$	$a_3 \neq 0$
		
$\square \leq$ Anzahl Nullstellen $\leq \square$	$\square \leq$ Anzahl Nullstellen $\leq \square$	$\square \leq$ Anzahl Nullstellen $\leq \square$

Jede Funktion mit einer Gleichung der Form

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \quad \text{mit} \quad n \geq 0,\ a_n \neq 0$$

heißt **Polynomfunktion**. Der größte auftretende Exponent $\boldsymbol{n}$ heißt **Grad** der Polynomfunktion.
Die Zahl $\boldsymbol{a_n}$ heißt auch **führender Koeffizient**. Der Term $a_n \cdot x^n$ legt das Verhalten von $f(x)$ fest, wenn $x \to \pm\infty$.

Der Graph einer Polynomfunktion vom Grad 5 ist rechts dargestellt.



Der **Fundamentalsatz der Algebra** besagt, dass jede Polynomfunktion vom Grad n mit $n \geq 1$ höchstens n reelle Nullstellen hat.

Mehr dazu erfährst du im Kompetenzheft – Komplexe Zahlen.

Polynomgleichungen lösen

1) Die Nullstelle jeder **linearen Funktion** können wir systematisch berechnen.
Berechne die Nullstelle von $f(x) = -2 \cdot x + 8$. Mehr dazu erfährst du im KH – Lineare Funktionen.

2) Die Nullstelle(n) jeder **quadratischen Funktion** können wir systematisch berechnen.
Berechne die Nullstellen von $g(x) = 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 16$. Mehr dazu erfährst du im KH – Quadratische Funktionen.

Lösungsformeln

Seit etwa 500 Jahren kennt man Lösungsformeln für Polynomgleichungen vom Grad 3 bzw. Grad 4.
Seit etwa 200 Jahren ist bekannt, dass es ab Grad 5 keine allgemeine Lösungsformel geben kann.

Substitution

Die Polynomfunktion f mit $f(x) = x^6 - 7 \cdot x^3 - 8$ hat Grad ____ .

Gesucht sind alle reellen Nullstellen von f. Die zugehörige Gleichung

$$x^6 - 7 \cdot x^3 - 8 = 0$$

hat eine besondere Struktur, nämlich

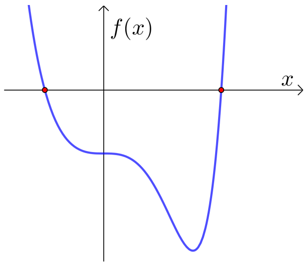
$$u^2 - 7 \cdot u - 8 = 0$$

mit $u =$ ______ . Löse diese quadratische Gleichung in u.

So eine Ersetzung heißt auch **Substitution**.

Die Gleichung $u^2 - 7 \cdot u - 8 = 0$ hat die 2 Lösungen $u_1 =$ ____ und $u_2 =$ ____ .

Berechne die beiden Nullstellen von f, und beschrifte sie in der nebenstehenden Abbildung.



Produkt-Null-Satz

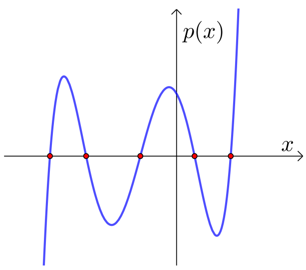
Die Polynomfunktion p mit $p(x) = 42 \cdot (x+7) \cdot (x^2 - x - 6) \cdot (x^2 + 4 \cdot x - 5)$ hat Grad ____ .

Gesucht sind alle reellen Nullstellen von p. Die zugehörige Gleichung hat eine besondere Struktur:

$$42 \cdot (x+7) \cdot (x^2 + 4 \cdot x - 5) \cdot (x^2 - x - 6) = 0$$

Produkt-Null-Satz: *„Ein Produkt ist genau dann 0, wenn mindestens ein Faktor 0 ist.“*

Berechne damit alle Lösungen der Gleichung.



Die Polynomfunktion p hat also die Nullstellen ____ , ____ , ____ , ____ und ____ .

Nullstelle 0

Die Polynomfunktion h mit $h(x) = 2\cdot x^5 - 4\cdot x^4 - 30\cdot x^3$ hat Grad ____ .

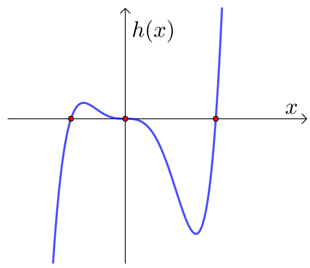
Gesucht sind alle reellen Nullstellen von h. Die zugehörige Gleichung

$$2\cdot x^5 - 4\cdot x^4 - 30\cdot x^3 = 0$$

hat eine besondere Struktur, weil 0 eine Lösung ist. Wir können herausheben:

$$2\cdot x^5 - 4\cdot x^4 - 30\cdot x^3 = x^{\square}\cdot\left(\square - \square - \square\right) = 0$$

Berechne damit alle Lösungen der Gleichung.



Die Polynomfunktion h hat also die Nullstellen ____ , ____ und ____ .

Nullstellen → Gleichung

Stelle die Gleichung einer Polynomfunktion f auf, die genau die Nullstellen -7, 0 und 3 hat.

Hinweis: Produkt-Null-Satz

Zerlegung in Linearfaktoren

Die kubische Polynomfunktion f hat die Nullstellen -5, -3 und $\frac{1}{2}$.
Ergänze die fehlenden Zahlen in der Funktionsgleichung von f:

$$f(x) = -2\cdot x^3 - 15\cdot x^2 - 22\cdot x + 15 = \square\cdot\left(x - \square\right)\cdot\left(x - \square\right)\cdot\left(x - \square\right)$$

Die rechte Seite heißt auch **Zerlegung in Linearfaktoren**.

Die kubische Polynomfunktion g hat die Nullstellen 2, 3 und n.
Fülle die Lücken in der Funktionsgleichung aus, und ermittle n:

$$g(x) = x^3 - 12\cdot x^2 + 41\cdot x - 42 = \square\cdot\left(x - \square\right)\cdot\left(x - \square\right)\cdot\left(x - \square\right)$$

Hinweis: 42

Teiler

Die kubische Polynomfunktion f hat die Nullstellen x_1, x_2 und x_3.

$$f(x) = 2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 34 \cdot x + 30 = \boxed{} \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

Angenommen du weißt, dass alle 3 Nullstellen x_1, x_2 und x_3 ganze Zahlen sind.
Welche Nullstellen kommen dann mit dem konstanten Koeffizienten 30 von f nur in Frage?

Ermittle damit alle 3 Nullstellen von f. Trial and Error

Abspaltung von Linearfaktoren

Gesucht sind die Nullstellen x_1, x_2 und x_3 der kubischen Polynomfunktion f mit

$$f(x) = 8 \cdot x^3 - 38 \cdot x^2 + 23 \cdot x + 42.$$

1) Überprüfe, dass $x_1 = 2$ eine Nullstelle von f ist.

2) Zerlege in Linearfaktoren.

$$8 \cdot x^3 - 38 \cdot x^2 + 23 \cdot x + 42 = \boxed{} \cdot \left(x - \boxed{}\right) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = 0$$

3) Dividiere durch $(x - 2)$. Mehr dazu erfährst du am Arbeitsblatt – Polynomdivision.

Gesucht sind also die Lösungen x_2 und x_3 von $8 \cdot x^2 - 22 \cdot x - 21 = 8 \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = 0$.

4) Berechne die Lösungen x_2 und x_3 der quadratischen Gleichung $8 \cdot x^2 - 22 \cdot x - 21 = 0$.

$$\Longrightarrow f(x) = \boxed{} \cdot \left(x - \boxed{}\right) \cdot \left(x - \boxed{}\right) \cdot \left(x - \boxed{}\right)$$