Potenzen mit natürlichen Exponenten

Wir verwenden die Potenzschreibweise, um uns Schreibarbeit zu ersparen:

$$\boldsymbol{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}}$$

Die Schreibweise a^9 ist praktischer als $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$.
Sprechweise: „*a hoch n*“ oder die „*n-te Potenz von a*“

Die Zahl a heißt **Basis** und die natürliche Zahl $n \geq 1$ heißt **Exponent** der **Potenz a^n** .

Potenzen mit natürlichen Exponenten

Berechne ohne Taschenrechner.

a) $2^3 = 8$ **b)** $3^2 = 9$ **c)** $5^1 = 5$ **d)** $1^5 = 1$ **e)** $0^2 = 0$ **f)** $(-1)^3 = -1$

Rechenregeln für Potenzen

Die folgenden Rechenregeln für Potenzen gelten für alle natürlichen Exponenten n und m.

Überprüfe diese Rechenregeln im Fall $n = 3$ bzw. $m = 2$ mit den Rechenregeln für Brüche und Terme.

i) $\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$

$$a^3 \cdot a^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^{3+2} \checkmark$$

ii) $\boldsymbol{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$

$$(a \cdot b)^3 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = a^3 \cdot b^3 \checkmark$$

iii) $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$ mit $b \neq 0$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3} \checkmark$$

iv) $\boldsymbol{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$

$$(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^{3 \cdot 2} \checkmark$$

Keine Rechenregeln für Potenzen

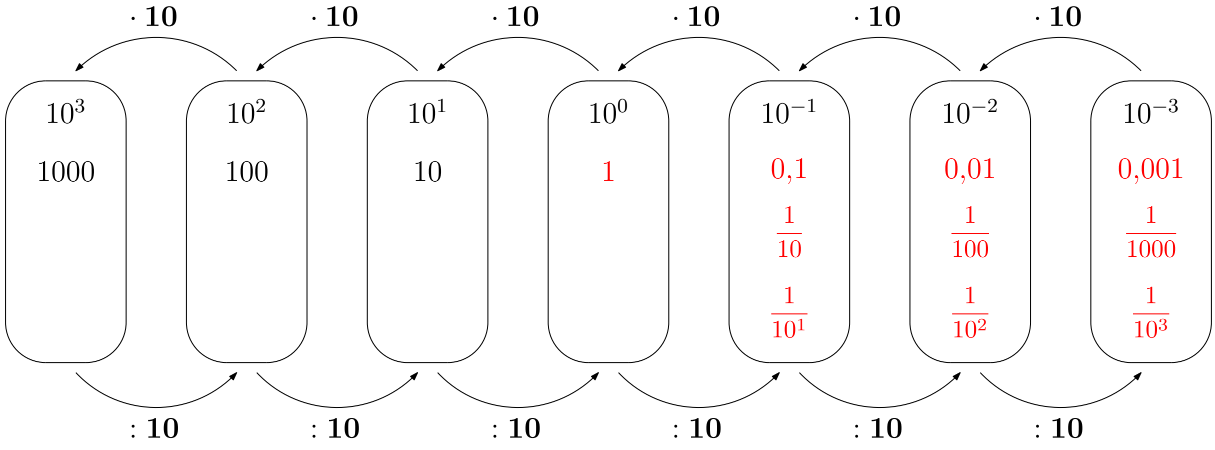
Berechne $(4+3)^2 = 49$ und $4^2 + 3^2 = 25$. Im Allgemeinen gilt: $(a+b)^n \neq a^n + b^n$

Berechne $(4-3)^2 = 1$ und $4^2 - 3^2 = 7$. Im Allgemeinen gilt: $(a-b)^n \neq a^n - b^n$

Mehr zum Ausmultiplizieren von $(a+b)^n$ und $(a-b)^n$ findest du am Arbeitsblatt – Binomische Formeln und Pascalsches Dreieck.

Zehnerpotenzen mit ganzzahligen Exponenten

Welche Zahlen sind 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, …? Trage die richtigen Zahlen in die Kästchen ein.



10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
1000	100	10	1	0,1 $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{10^1}$	0,01 $\frac{1}{100}$ $\frac{1}{10^2}$	0,001 $\frac{1}{1000}$ $\frac{1}{10^3}$

Wir definieren also: $\mathbf{10^0 = 1}$ bzw. $\boldsymbol{10^{-n} = \frac{1}{10^n}}$

Damit gelten alle Rechenregeln für Zehnerpotenzen auch mit ganzzahligen Exponenten.

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Allgemein definieren wir Potenzen mit Basis $a \neq 0$ und ganzzahligen Exponenten folgendermaßen:

$$\boldsymbol{a^0 = 1 \qquad a^{-1} = \frac{1}{a^1} \qquad a^{-2} = \frac{1}{a^2} \qquad a^{-3} = \frac{1}{a^3} \qquad \cdots \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Rechenregel für Potenzen

Die folgende Rechenregel gilt für alle ganzzahligen Exponenten n und m: $\boldsymbol{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$ mit $a \neq 0$

Überprüfe diese Rechenregel in den folgenden Fällen mit den Rechenregeln für Brüche und Terme.

i) $\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a^3 \checkmark \; (5 - 2 = 3)$

ii) $\frac{a^2}{a^5} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^3} = a^{-3} \checkmark \; (2 - 5 = -3)$

iii) $\frac{a^3}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = 1 = a^0 \checkmark \; (3 - 3 = 0)$

iv) $\frac{a^{-2}}{a^{-3}} = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^3}} = \frac{a^3}{a^2} = a^1 \checkmark \; (-2 - (-3) = 1)$

Rechnen mit Potenzen

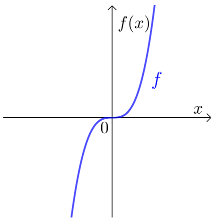
Es gilt $a, b, c \neq 0$. Schreibe den Term in der Form $a^x \cdot b^y \cdot c^z$ mit $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

a) $\frac{(a^3 \cdot b^2)^4 \cdot c^{-2}}{a \cdot b^3 \cdot c^7} = \frac{a^{12} \cdot b^8 \cdot c^{-2}}{a \cdot b^3 \cdot c^7} = a^{11} \cdot b^5 \cdot c^{-9}$

b) $\left(\frac{a^2 \cdot c}{b^3}\right)^3 \cdot \frac{b}{a^{-1} \cdot c^{-2}} = \frac{a^6 \cdot c^3 \cdot b^1}{b^9 \cdot a^{-1} \cdot c^{-2}} = a^7 \cdot b^{-8} \cdot c^5$

Potenzfunktionen

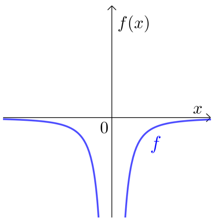
Jede Funktion f mit $\boldsymbol{f(x) = a \cdot x^m}$ heißt **Potenzfunktion**.
Das qualitative Verhalten der Potenzfunktion hängt von den Parametern $a \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{Z}^*$ ab.
Ist m positiv oder negativ? Ist m gerade oder ungerade? Ist a positiv oder negativ? Kreuze jeweils an.



☒ $m > 0$ ☐ $m < 0$

☐ m gerade ☒ m ungerade

☒ $a > 0$ ☐ $a < 0$



☐ $m > 0$ ☒ $m < 0$

☒ m gerade ☐ m ungerade

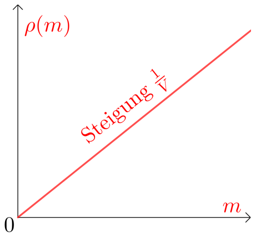
☐ $a > 0$ ☒ $a < 0$

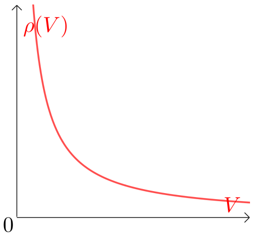
Masse – Volumen – Dichte

Für die Masse m, das Volumen V und die konstante Dichte ρ eines Körpers gilt: $\rho = \frac{m}{V}$

a) Ist das Volumen konstant, hängt die Dichte nur von der Masse ab: $\rho(m) = \frac{m}{V} = \frac{1}{V} \cdot m$
Beschrifte unten die Achsen und skizziere einen möglichen Funktionsgraphen.

b) Ist die Masse konstant, hängt die Dichte nur vom Volumen ab: $\rho(V) = \frac{m}{V} = m \cdot V^{-1}$
Beschrifte unten die Achsen und skizziere einen möglichen Funktionsgraphen.





n-te Wurzel

Wir nehmen eine beliebige natürliche Zahl $n \geq 1$ und eine beliebige reelle Zahl $a \geq 0$.

Dann hat die Gleichung $\boldsymbol{x^n = a}$ *genau eine* Lösung in $\mathbb{R}$, die $x \geq 0$ erfüllt.

Wir kürzen diese Lösung mit $\boldsymbol{x = \sqrt[n]{a}}$ ab, und nennen sie die **n-te Wurzel aus a**.

Es gilt also: $\boldsymbol{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$ „n-te Wurzel“ und „hoch n“ heben einander auf, wenn $a \geq 0$ gilt.

Im Fall $n = 2$ sprechen wir auch von der Quadratwurzel und schreiben nur $\sqrt{a}$ statt $\sqrt[2]{a}$.

n-te Wurzel

Berechne ohne Taschenrechner.

a) $\sqrt{9} = 3$

b) $\sqrt[3]{8} = 2$

c) $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

d) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$

e) $\sqrt{230687^2} = 230687$

f) $\sqrt[3]{42^{42}} = 42^{14}$

g) $\sqrt{2^2} = 2$

h) $\sqrt{(-2)^2} = 2$

$\sqrt{(-2)^2} = ?$

Die Gleichung $x^2 = 4$ hat genau 2 Lösungen, nämlich $x = \pm\sqrt{4}$, also $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.
Mit dem Ausdruck $\sqrt{4}$ ist immer die *positive* Lösung gemeint, also: $\sqrt{4} = 2$ bzw. $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

Wenn $a \geq 0$ ist, dann gilt: $\sqrt{a^2} = a$

Wenn $a < 0$ ist, dann ist $-a > 0$ und es gilt: $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a$

Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt also: $\boldsymbol{\sqrt{a^2} = |a|}$

Wurzeln und Grundrechnungsarten

Genau wie Potenzen sind auch Wurzeln mit den beiden Punktrechnungen $(*, /)$ kompatibel, aber *nicht* mit den beiden Strichrechnungen $(+, -)$. Für alle $a \geq 0$ und $b \geq 0$ gilt nämlich:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}} \qquad \text{bzw.} \qquad \boldsymbol{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Aber: $\sqrt{16+9} = 5 \neq 7 = \sqrt{16} + \sqrt{9}$ bzw. $\sqrt{25-16} = 3 \neq 1 = \sqrt{25} - \sqrt{16}$

Wurzelziehen

Es gilt $a, b > 0$. Ziehe die Wurzel.

a) $\sqrt{a^6} = a^3$ **b)** $\sqrt{16 \cdot a^4} = 4 \cdot a^2$ **c)** $\sqrt{\frac{a^2}{b^4}} = \frac{a}{b^2}$ **d)** $\sqrt{25 \cdot a^2 - 16 \cdot a^2} = \sqrt{9 \cdot a^2} = 3 \cdot a$

Welche Zahl ist $9^{\frac{3}{2}}$?

Als Nächstes definieren wir die Potenz $a^{\frac{m}{n}}$ für alle rationalen Exponenten und $a > 0$.
Welche Zahl soll zum Beispiel $9^{\frac{3}{2}} = 9^{1{,}5}$ sein?
Damit alle Rechenregeln auch für diese Potenzen gelten, haben wir nur eine Möglichkeit.
Die beiden *positiven* Zahlen $9^{\frac{3}{2}}$ und $\sqrt[2]{9^3}$ ergeben dann nämlich beide mit sich selbst multipliziert 9^3:

$$\left(9^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 9^{\frac{3}{2} \cdot 2} = 9^3 \quad \text{und} \quad \left(\sqrt[2]{9^3}\right)^2 = 9^3$$

Also sind $9^{\frac{3}{2}}$ und $\sqrt[2]{9^3}$ nur verschiedene Schreibweisen für die *gleiche* Zahl: $9^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{9^3} = \left(\sqrt[2]{9}\right)^3 = 27$

Potenzen mit rationalen Exponenten

Allgemein definieren wir Potenzen mit Basis $a > 0$ und rationalen Exponenten folgendermaßen:

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Terme in Potenzschreibweise umwandeln

Es gilt $a > 0$. Schreibe den Term in der Form $a^{\frac{m}{n}}$ an.

a) $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^2}} = \dfrac{1}{a^{\frac{2}{5}}} = a^{-\frac{2}{5}}$

c) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}} = \dfrac{a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = a^{\frac{9+4-6}{12}} = a^{\frac{7}{12}}$

d) $\sqrt[4]{\sqrt[2]{a}} = (\sqrt[2]{a})^{\frac{1}{4}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{8}}$

Terme in Wurzelschreibweise umwandeln

Es gilt $a > 0$. Schreibe den Term in der Form $\sqrt[n]{a^m}$ an.

a) $a^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{a^7}$

b) $\dfrac{1}{a^{\frac{3}{2}}} = a^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{a^{-3}}$

c) $\dfrac{a}{\sqrt{a}} = \dfrac{a}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{1-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

d) $\dfrac{a^2 \cdot \sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a^{-2}}} = \dfrac{a^2 \cdot a^{\frac{1}{5}}}{a^{-\frac{2}{3}}} = a^{2+\frac{1}{5}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{30+3+10}{15}} = a^{\frac{43}{15}} = \sqrt[15]{a^{43}}$

Wurzelschreibweise ↔ Potenzschreibweise

Es gilt $a > 0$. Trage jeweils natürliche Zahlen richtig in die Kästchen ein.

a) $\sqrt[3]{a^6} = a^2$ $\qquad \dfrac{6}{3} = 2$

b) $\sqrt[5]{a^{21}} = a^{4{,}2}$ $\qquad \dfrac{x}{5} = 4{,}2 \iff x = 21$

c) $\sqrt[15]{a^{63}} = a^{4{,}2}$ $\qquad \dfrac{63}{x} = 4{,}2 \iff x = \dfrac{63}{4{,}2} = 15$

d) $\sqrt[10]{a^{23}} = a^{2{,}3}$ $\qquad 2{,}3 = \dfrac{23}{10}$

Potenzfunktion und Wurzelfunktion

Rechts unten siehst du den Graphen der **Potenzfunktion** $\boldsymbol{f}$ mit $\boldsymbol{f(x) = x^3}$ für $x \geq 0$ dargestellt.

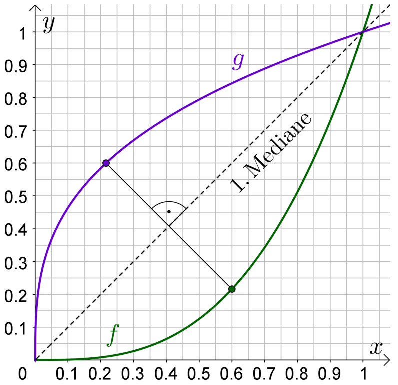
Lies die folgenden Zahlen so genau wie möglich ab.
Vergleiche dein Ergebnis mit dem Taschenrechner.

a) $0{,}6^3 \approx 0{,}2$

b) $0{,}8^3 \approx 0{,}5$

c) $\sqrt[3]{0{,}2} \approx 0{,}6$

d) $\sqrt[3]{0{,}4} \approx 0{,}75$



Die **Wurzelfunktion** $\boldsymbol{g}$ mit $\boldsymbol{g(x) = \sqrt[3]{x}}$ ist die Umkehrfunktion der Potenzfunktion f.

Die Graphen von f und g sind also an der 1. Mediane gespiegelt.

Zu jedem Punkt $(x \mid x^3)$ am Graphen von f liegt der gespiegelte Punkt $(x^3 \mid x)$ am Graphen von g.

Tatsächlich gilt ja eben $g(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$.