Potenzen mit natürlichen Exponenten

Wir verwenden die Potenzschreibweise, um uns Schreibarbeit zu ersparen:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

Die Schreibweise a^9 ist praktischer als $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$.
Sprechweise: „*a hoch n*" oder manchmal die „*n-te Potenz von a*"

Die Zahl a heißt **Basis**, die Zahl n heißt **Exponent**.

Potenzen von Hand berechnen

Berechne ohne Taschenrechner.

1) $2^3 = 8$ **2)** $3^2 = 9$ **3)** $5^1 = 5$ **4)** $1^5 = 1$ **5)** $0^2 = 0$ **6)** $(-1)^3 = -1$

Rechenregeln für Potenzen

Die folgenden Rechenregeln gelten für alle natürlichen Exponenten. $m, n \in \mathbb{N}$
Überprüfe die Rechenregeln, wenn $n = 3$ und $m = 2$ ist.

1) $\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$

$a^3 \cdot a^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^{3+2}$ ✓

2) $\boldsymbol{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$

$(a \cdot b)^3 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = a^3 \cdot b^3$ ✓

3) $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3}$ ✓

4) $\boldsymbol{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$

$(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^{3 \cdot 2}$ ✓

Keine Rechenregel für Potenzen

Berechne $(3+4)^2 = 7^2 = 49$ und $3^2 + 4^2 = 16 + 9 = 25$.

Im Allgemeinen gilt: $(a+b)^n \neq a^n + b^n$ Können die Zahlen gleich sein? Mehr dazu ist am AB – Pascalsches Dreieck I.

Welche Zahl ist 2^{-3}?

Als Nächstes wollen wir a^n für alle *ganzen* Zahlen n definieren. $n \in \mathbb{Z}$
Damit die Rechenregeln für Potenzen und Brüche weiter gelten, haben wir dafür nur eine Möglichkeit.
Setze das Muster bis zur Potenz 2^{-3} nach links fort:

$$\begin{tikzcd}
\ldots & 2^{-3} \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^{-2} \arrow[l, bend right, ":2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^{-1} \arrow[l, bend right, ":2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^0 \arrow[l, bend right, ":2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^1 \arrow[l, bend right, ":2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^2 \arrow[l, bend right, ":2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^3 \arrow[l, bend right, ":2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^4 \arrow[l, bend right, ":2"'] & \ldots
\end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow\ 2^0 = \frac{2^1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\Longrightarrow\ 2^{-1} = \frac{2^0}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$\Longrightarrow\ 2^{-2} = \frac{2^{-1}}{2} = 2^{-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} = 0{,}25$

$\Longrightarrow\ 2^{-3} = \frac{2^{-2}}{2} = 2^{-2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3} = 0{,}125$

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Für Potenzen mit Basis $a \neq 0$ definieren wir:

$$\boldsymbol{a^0 = 1 \qquad a^{-1} = \frac{1}{a^1} \qquad a^{-2} = \frac{1}{a^2} \qquad a^{-3} = \frac{1}{a^3} \qquad \cdots \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Rechenregel für Potenzen

Die folgende Rechenregel gilt für alle ganzzahligen Exponenten n und m: $\boldsymbol{\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$ $\quad m, n \in \mathbb{Z}$

Überprüfe die Rechenregel, wenn…

1) … $n = 5$ und $m = 2$ ist.

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a^3 = a^{5-2} \;\checkmark$$

2) … $n = 3$ und $m = 3$ ist.

$$\frac{a^3}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = 1 = a^0 = a^{3-3} \;\checkmark$$

3) … $n = 2$ und $m = 5$ ist.

$$\frac{a^2}{a^5} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^3} = a^{-3} = a^{2-5} \;\checkmark$$

4) … $n = -2$ und $m = -3$ ist.

$$\frac{a^{-2}}{a^{-3}} = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^3}} = \frac{a^3}{a^2} = a^1 = a^{-2-(-3)} \;\checkmark$$

Rechnen mit Potenzen

Schreibe den Term in der Form $a^x \cdot b^y \cdot c^z$ mit $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

a) $\dfrac{(a^3 \cdot b^2)^4 \cdot c^{-2}}{a \cdot b^3 \cdot c^7} = \dfrac{a^{12} \cdot b^8 \cdot c^{-2}}{a \cdot b^3 \cdot c^7} = a^{11} \cdot b^5 \cdot c^{-9}$

b) $\left(\dfrac{a^2 \cdot c}{b^3}\right)^3 \cdot \dfrac{b}{a^{-1} \cdot c^{-2}} = \dfrac{a^6 \cdot c^3 \cdot b^1}{b^9 \cdot a^{-1} \cdot c^{-2}} = a^7 \cdot b^{-8} \cdot c^5$

c) $a^3 \cdot \left(\dfrac{b^5}{a \cdot c^{42}}\right)^0 \cdot \left((b^2)^3\right)^4 \cdot \dfrac{1}{c} = a^3 \cdot 1 \cdot (b^6)^4 \cdot c^{-1} = a^3 \cdot b^{24} \cdot c^{-1}$

***n*-te Wurzel**

Die Gleichung $\boldsymbol{x^n = a}$ hat für jede Zahl $a \geq 0$ und jede natürliche Zahl $n \geq 1$ genau eine Lösung $x \geq 0$.

Wir kürzen diese Lösung x mit $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$ ab und nennen sie die ***n*-te Wurzel aus *a***.

Bei $n = 2$ sprechen wir auch von der Quadratwurzel und schreiben $\sqrt{a}$ statt $\sqrt[2]{a}$.

Es gilt also: $\boldsymbol{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$

„n-te Wurzel“ und „hoch n“ heben einander auf, wenn $a \geq 0$ ist.

Wurzeln von Hand berechnen

Berechne ohne Taschenrechner.

1) $\sqrt[3]{8} = 2$

2) $\sqrt{9} = 3$

3) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$

4) $\sqrt{230687^2} = 230687$

5) $\sqrt[3]{42^{42}} = 42^{14}$

6) $\sqrt[42]{1} = 1$

7) $\sqrt[42]{0} = 0$

8) $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

9) $\sqrt{(-2)^2} = 2$

$\boldsymbol{\sqrt{(-2)^2} = \,?}$

Die Gleichung $x^2 = 4$ hat genau 2 Lösungen, nämlich $x = \pm\sqrt{4}$, also $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.
Mit $\sqrt{4}$ ist *immer* die *positive* Lösung gemeint, also $\sqrt{4} = 2$.

Wenn $a \geq 0$ ist, dann gilt $\sqrt{a^2} = a$.
Wenn $a < 0$ ist, dann gilt $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a$.
Allgemein gilt also: $\boldsymbol{\sqrt{a^2} = |a|}$

Also ist $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$.

Mehr zu Beträgen findest du am UB – Betrags(un)gleichungen.

Wurzeln aus negativen Zahlen

Der Ausdruck $\sqrt{-4}$ ist sinnlos, weil die Gleichung $x^2 = -4$ *keine* reelle Lösung hat.

Tatsächlich hat die Gleichung 2 Lösungen, die keine reellen Zahlen, sondern komplexe Zahlen sind.

Dem Ausdruck $\pm\sqrt{-4}$ kann man dann einen Sinn geben. Mehr dazu findest du am Arbeitsblatt – Komplexe Zahlen.

Ausdrücken wie $\sqrt[3]{-8}$ kann man einen Sinn geben,
weil die Gleichung $x^3 = -8$ genau eine reelle Lösung hat, nämlich -2.

Potenzfunktion und Wurzelfunktion

Rechts siehst du den Graphen der Potenzfunktion $f(x) = x^3$ für $x \geq 0$.

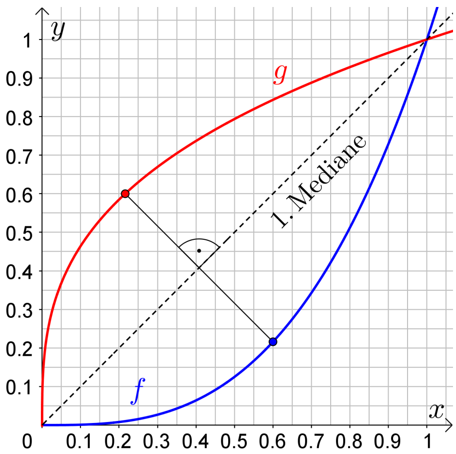
1) Lies die folgenden Zahlen so genau wie möglich ab.
Vergleiche dein Ergebnis mit dem Taschenrechner:

a) $0{,}6^3 \approx 0{,}2$

b) $0{,}8^3 \approx 0{,}5$

c) $\sqrt[3]{0{,}2} \approx 0{,}6$

d) $\sqrt[3]{0{,}4} \approx 0{,}75$



2) Die Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ist die Umkehrfunktion von $f(x) = x^3$.
Die Graphen von f und g sind also an der 1. Mediane gespiegelt.
Zu jedem Punkt $(x \mid x^3)$ am Graphen von f liegt der gespiegelte Punkt $(x^3 \mid x)$ am Graphen von g.
Zeichne den Graphen von g oben ein.

Welche Zahl ist $9^{\frac{3}{2}}$?

Als Nächstes wollen wir $a^{\frac{m}{n}}$ für alle *rationalen* Exponenten definieren. Welche Zahl ist z.B. $9^{\frac{3}{2}}$?
Damit die Rechenregeln für Potenzen und Brüche weiter gelten, haben wir dafür nur eine Möglichkeit.
Die beiden *positiven* Zahlen $9^{\frac{3}{2}}$ und $\sqrt[2]{9^3}$ ergeben nämlich beide mit sich selbst multipliziert 9^3:

$$\left(9^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 9^{\frac{3}{2}\cdot 2} = 9^3 \quad \text{und} \quad \left(\sqrt[2]{9^3}\right)^2 = \sqrt[2]{9^3} \cdot \sqrt[2]{9^3} = 9^3$$

Die beiden Zahlen sind also gleich.

Damit muss $9^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{9^3} = 27$ sein.

Kontrolliere mit dem Taschenrechner.

Potenzen mit rationalen Exponenten

Für Potenzen mit Basis $a \geq 0$ und rationalem Exponenten $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 1$ definieren wir:

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Wurzel → Potenz

Schreibe den Term in der Form $a^{\frac{m}{n}}$ an.

1) $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$

2) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^2}} = \dfrac{1}{a^{\frac{2}{5}}} = a^{-\frac{2}{5}}$

3) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}} = \dfrac{a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = a^{\frac{9+4-6}{12}} = a^{\frac{7}{12}}$

4) $\sqrt[4]{\sqrt[2]{a}} = (\sqrt[2]{a})^{\frac{1}{4}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{8}}$

Potenz → Wurzel

Schreibe den Term in der Form $\sqrt[n]{a^m}$ an.

1) $a^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{a^7}$

2) $\dfrac{1}{a^{\frac{3}{2}}} = a^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{a^{-3}}$

3) $\dfrac{a}{\sqrt{a}} = \dfrac{a}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{1-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

4) $\dfrac{a^2 \cdot \sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a^{-2}}} = \dfrac{a^2 \cdot a^{\frac{1}{5}}}{a^{-\frac{2}{3}}} = a^{2+\frac{1}{5}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{30+3+10}{15}} = a^{\frac{43}{15}} = \sqrt[15]{a^{43}}$

Rechenregeln für Wurzeln

Es sind $a \geq 0$ und $b \geq 0$. Vereinfache jeweils so weit wie möglich:

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = a \cdot b$$

$$(\sqrt[n]{a})^{n \cdot k} = \left((\sqrt[n]{a})^n\right)^k = a^k$$

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m \cdot n} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right)^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$$

Erkläre damit die Rechenregeln für das Wurzelziehen:

1) $\boldsymbol{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$ — Beide Zahlen sind ≥ 0 und „hoch n“ gleich.

2) $\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m}$ — **1)** mehrfach anwenden.

3) $\boldsymbol{\sqrt[n \cdot k]{a^k} = \sqrt[n]{a}}$ — Beide Zahlen sind ≥ 0 und „hoch $n \cdot k$“ gleich.

4) $\boldsymbol{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}}$ — Beide Zahlen sind ≥ 0 und „hoch $m \cdot n$“ gleich.

Keine Rechenregel für Wurzeln

Berechne $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ und $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$.

Im Allgemeinen gilt: $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ — Können die Zahlen gleich sein?

Rechnen mit Wurzeln

Schreibe den Term in der Form $a^x \cdot b^y \cdot c^z$ mit $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Du kannst entweder die Rechenregeln für Wurzeln verwenden oder in Potenzschreibweise rechnen.

$$\frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{b \cdot c^4}}{a^5 \cdot \sqrt[6]{b^2 \cdot c^{-2}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{4}{2}}}{a^5 \cdot b^{\frac{2}{6}} \cdot c^{-\frac{2}{6}}} = a^{\frac{2}{3}-5} \cdot b^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} \cdot c^{2+\frac{1}{3}} = a^{-\frac{13}{3}} \cdot b^{\frac{1}{6}} \cdot c^{\frac{7}{3}}$$

Welche Zahl ist $3^{\sqrt{2}}$?

$\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl. Wir können sie also nicht als Bruch darstellen.
Welche Zahl ist dann $3^{\sqrt{2}} = 3^{1{,}414213\ldots}$? Berechne mit dem Taschenrechner:

1) $a_1 = 3^1 = 3$

2) $a_2 = 3^{1{,}4} = 3^1 \cdot 3^{\frac{4}{10}} = a_1 \cdot \sqrt[10]{3^4} = 4{,}655\,53\ldots$

3) $a_3 = 3^{1{,}41} = 3^{1{,}4} \cdot 3^{\frac{1}{100}} = a_2 \cdot \sqrt[100]{3} = 4{,}706\,96\ldots$

4) $a_4 = 3^{1{,}414} = a_3 \cdot \sqrt[1000]{3^4} = 4{,}727\,69\ldots$

5) $a_5 = 3^{1{,}4142} = a_4 \cdot \sqrt[10000]{3^2} = 4{,}728\,73\ldots$

Warum muss $\sqrt[n]{3^m} \geq 1$ für alle $n \geq 1$ und $m \geq 0$ gelten?

Mit jeder zusätzlichen Nachkommastelle wird das Ergebnis größer oder bleibt gleich groß.
Die Ergebnisse bleiben aber stets kleiner als $3^2 = 9$.

In der Mathematik sagen wir dazu:
„Die Folge $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt. Der Grenzwert dieser Folge ist $3^{\sqrt{2}}$.“

Mehr dazu findest du am AB – Grenzwerte.