Potenzen mit natürlichen Exponenten

Wir verwenden die Potenzschreibweise, um uns Schreibarbeit zu ersparen:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

Die Schreibweise a^9 ist praktischer als $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$.

Sprechweise: „*a hoch n*“ oder die „*n-te Potenz von a*“

Die Zahl a heißt **Basis** und die natürliche Zahl $n \geq 1$ heißt **Exponent** der **Potenz** a^n .

Potenzen mit natürlichen Exponenten

Berechne ohne Taschenrechner.

a) $2^3 = \square$ **b)** $3^2 = \square$ **c)** $5^1 = \square$ **d)** $1^5 = \square$ **e)** $0^2 = \square$ **f)** $(-1)^3 = \square$

Rechenregeln für Potenzen

Die folgenden Rechenregeln für Potenzen gelten für alle natürlichen Exponenten n und m.

Überprüfe diese Rechenregeln im Fall $n = 3$ bzw. $m = 2$ mit den Rechenregeln für Brüche und Terme.

i) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$a^3 \cdot a^2 = \square$

ii) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$(a \cdot b)^3 = \square$

iii) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ mit $b \neq 0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \square$

iv) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$(a^3)^2 = \square$

Keine Rechenregeln für Potenzen

Berechne $(4+3)^2 = \square$ und $4^2 + 3^2 = \square$. Im Allgemeinen gilt: $(a+b)^n \neq a^n + b^n$

Berechne $(4-3)^2 = \square$ und $4^2 - 3^2 = \square$. Im Allgemeinen gilt: $(a-b)^n \neq a^n - b^n$

Mehr zum Ausmultiplizieren von $(a+b)^n$ und $(a-b)^n$ findest du am Arbeitsblatt – Binomische Formeln und Pascalsches Dreieck.

Zehnerpotenzen mit ganzzahligen Exponenten

Welche Zahlen sind 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, …? Trage die richtigen Zahlen in die Kästchen ein.

10^3	$\xleftarrow{\cdot 10}$ $\xrightarrow{:10}$	10^2	$\xleftarrow{\cdot 10}$ $\xrightarrow{:10}$	10^1	$\xleftarrow{\cdot 10}$ $\xrightarrow{:10}$	10^0	$\xleftarrow{\cdot 10}$ $\xrightarrow{:10}$	10^{-1}	$\xleftarrow{\cdot 10}$ $\xrightarrow{:10}$	10^{-2}	$\xleftarrow{\cdot 10}$ $\xrightarrow{:10}$	10^{-3}
1000		100		10		$\square$		$\square$		$\square$		$\square$
								$\frac{1}{\square}$		$\frac{1}{\square}$		$\frac{1}{\square}$
								$\frac{1}{10^{\square}}$		$\frac{1}{10^{\square}}$		$\frac{1}{10^{\square}}$

Wir definieren also: $\mathbf{10^0 = 1}$ bzw. $\mathbf{10^{-n}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10^n}}$

Damit gelten alle Rechenregeln für Zehnerpotenzen auch mit ganzzahligen Exponenten.

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Allgemein definieren wir Potenzen mit Basis $a \neq 0$ und ganzzahligen Exponenten folgendermaßen:

$$\boldsymbol{a^0 = 1} \qquad \boldsymbol{a^{-1} = \frac{1}{a^1}} \qquad \boldsymbol{a^{-2} = \frac{1}{a^2}} \qquad \boldsymbol{a^{-3} = \frac{1}{a^3}} \qquad \cdots \qquad \boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Rechenregel für Potenzen

Die folgende Rechenregel gilt für alle ganzzahligen Exponenten n und m: $\boldsymbol{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$ mit $a \neq 0$

Überprüfe diese Rechenregel in den folgenden Fällen mit den Rechenregeln für Brüche und Terme.

i) $\frac{a^5}{a^2} =$ ☐

iii) $\frac{a^3}{a^3} =$ ☐

ii) $\frac{a^2}{a^5} =$ ☐

iv) $\frac{a^{-2}}{a^{-3}} =$ ☐

Rechnen mit Potenzen

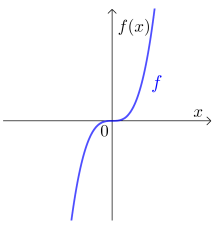
Es gilt $a, b, c \neq 0$. Schreibe den Term in der Form $a^x \cdot b^y \cdot c^z$ mit $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

a) $\frac{(a^3 \cdot b^2)^4 \cdot c^{-2}}{a \cdot b^3 \cdot c^7} =$

b) $\left(\frac{a^2 \cdot c}{b^3}\right)^3 \cdot \frac{b}{a^{-1} \cdot c^{-2}} =$

Potenzfunktionen

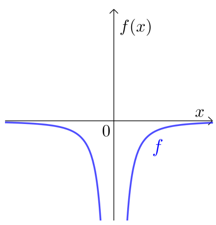
Jede Funktion f mit $\boldsymbol{f(x) = a \cdot x^m}$ heißt **Potenzfunktion**.
Das qualitative Verhalten der Potenzfunktion hängt von den Parametern $a \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{Z}^*$ ab.
Ist m positiv oder negativ? Ist m gerade oder ungerade? Ist a positiv oder negativ? Kreuze jeweils an.



☐ $m > 0$ ☐ $m < 0$

☐ m gerade ☐ m ungerade

☐ $a > 0$ ☐ $a < 0$



☐ $m > 0$ ☐ $m < 0$

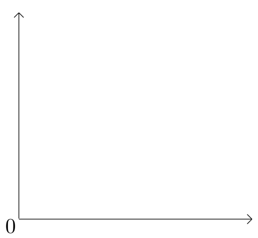
☐ m gerade ☐ m ungerade

☐ $a > 0$ ☐ $a < 0$

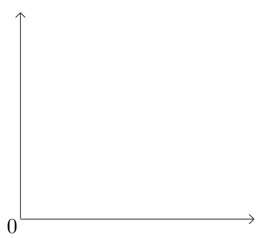
Masse – Volumen – Dichte

Für die Masse m, das Volumen V und die konstante Dichte ρ eines Körpers gilt: $\rho = \frac{m}{V}$

a) Ist das Volumen konstant, hängt die Dichte nur von der Masse ab: $\rho(m) = \frac{m}{V} = \frac{1}{V} \cdot m$
Beschrifte unten die Achsen und skizziere einen möglichen Funktionsgraphen.



b) Ist die Masse konstant, hängt die Dichte nur vom Volumen ab: $\rho(V) = \frac{m}{V} = m \cdot V^{-1}$
Beschrifte unten die Achsen und skizziere einen möglichen Funktionsgraphen.



n-te Wurzel

Wir nehmen eine beliebige natürliche Zahl $n \geq 1$ und eine beliebige reelle Zahl $a \geq 0$.

Dann hat die Gleichung $\boldsymbol{x^n = a}$ *genau eine* Lösung in $\mathbb{R}$, die $x \geq 0$ erfüllt.

Wir kürzen diese Lösung mit $\boldsymbol{x = \sqrt[n]{a}}$ ab, und nennen sie die **n-te Wurzel aus a**.

Es gilt also: $\boldsymbol{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$ „n-te Wurzel" und „hoch n" heben einander auf, wenn $a \geq 0$ gilt.

Im Fall $n = 2$ sprechen wir auch von der Quadratwurzel und schreiben nur $\sqrt{a}$ statt $\sqrt[2]{a}$.

n-te Wurzel

Berechne ohne Taschenrechner.

a) $\sqrt{9} = \boxed{}$ **c)** $\sqrt{\frac{9}{25}} = \boxed{}$ **e)** $\sqrt{230687^2} = \boxed{}$ **g)** $\sqrt{2^2} = \boxed{}$

b) $\sqrt[3]{8} = \boxed{}$ **d)** $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \boxed{}$ **f)** $\sqrt[3]{42^{42}} = \boxed{}$ **h)** $\sqrt{(-2)^2} = \boxed{}$

$\sqrt{(-2)^2} = ?$

Die Gleichung $x^2 = 4$ hat genau 2 Lösungen, nämlich $x = \pm\sqrt{4}$, also $x_1 = \boxed{}$ und $x_2 = \boxed{}$.

Mit dem Ausdruck $\sqrt{4}$ ist immer die *positive* Lösung gemeint, also: $\sqrt{4} = 2$ bzw. $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

Wenn $a \geq 0$ ist, dann gilt: $\sqrt{a^2} = a$

Wenn $a < 0$ ist, dann ist $-a > 0$ und es gilt: $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a$

Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt also: $\boldsymbol{\sqrt{a^2} = |a|}$

Wurzeln und Grundrechnungsarten

Genau wie Potenzen sind auch Wurzeln mit den beiden Punktrechnungen ($*$, $/$) kompatibel, aber *nicht* mit den beiden Strichrechnungen ($+$, $-$). Für alle $a \geq 0$ und $b \geq 0$ gilt nämlich:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}} \qquad \text{bzw.} \qquad \boldsymbol{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Aber: $\sqrt{16+9} = \boxed{} \neq \boxed{} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$ bzw. $\sqrt{25-16} = \boxed{} \neq \boxed{} = \sqrt{25} - \sqrt{16}$

Wurzelziehen

Es gilt $a, b > 0$. Ziehe die Wurzel.

a) $\sqrt{a^6} = \boxed{}$ **b)** $\sqrt{16 \cdot a^4} = \boxed{}$ **c)** $\sqrt{\frac{a^2}{b^4}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ **d)** $\sqrt{25 \cdot a^2 - 16 \cdot a^2} = \boxed{}$

Welche Zahl ist $9^{\frac{3}{2}}$?

Als Nächstes definieren wir die Potenz $a^{\frac{m}{n}}$ für alle rationalen Exponenten und $a > 0$.

Welche Zahl soll zum Beispiel $9^{\frac{3}{2}} = 9^{1{,}5}$ sein?

Damit alle Rechenregeln auch für diese Potenzen gelten, haben wir nur eine Möglichkeit.

Die beiden *positiven* Zahlen $9^{\frac{3}{2}}$ und $\sqrt[2]{9^3}$ ergeben dann nämlich beide mit sich selbst multipliziert 9^3:

$$\left(9^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 9^{\frac{3}{2}\cdot 2} = 9^3 \quad \text{und} \quad \left(\sqrt[2]{9^3}\right)^2 = 9^3$$

Also sind $9^{\frac{3}{2}}$ und $\sqrt[2]{9^3}$ nur verschiedene Schreibweisen für die *gleiche* Zahl: $9^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{9^3} = \left(\sqrt[2]{9}\right)^3 = 27$

Potenzen mit rationalen Exponenten

Allgemein definieren wir Potenzen mit Basis $a > 0$ und rationalen Exponenten folgendermaßen:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Terme in Potenzschreibweise umwandeln

Es gilt $a > 0$. Schreibe den Term in der Form $a^{\frac{m}{n}}$ an.

a) $\sqrt{a^3} =$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^2}} =$

c) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}} =$

d) $\sqrt[4]{\sqrt[2]{a}} =$

Terme in Wurzelschreibweise umwandeln

Es gilt $a > 0$. Schreibe den Term in der Form $\sqrt[n]{a^m}$ an.

a) $a^{\frac{7}{5}} =$

b) $\dfrac{1}{a^{\frac{3}{2}}} =$

c) $\dfrac{a}{\sqrt{a}} =$

d) $\dfrac{a^2 \cdot \sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a^{-2}}} =$

Wurzelschreibweise ↔ Potenzschreibweise

Es gilt $a > 0$. Trage jeweils natürliche Zahlen richtig in die Kästchen ein.

a) $\sqrt[3]{a^6} = a^{\square}$

b) $\sqrt[5]{a^{\square}} = a^{4,2}$

c) $\sqrt[\square]{a^{63}} = a^{4,2}$

d) $\sqrt[\square]{a^{\square}} = a^{2,3}$

Potenzfunktion und Wurzelfunktion

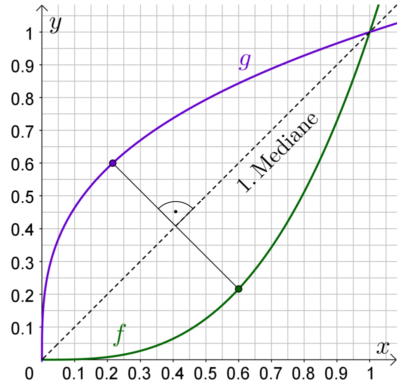
Rechts unten siehst du den Graphen der **Potenzfunktion** $\boldsymbol{f}$ mit $\boldsymbol{f(x) = x^3}$ für $x \geq 0$ dargestellt.
Lies die folgenden Zahlen so genau wie möglich ab.
Vergleiche dein Ergebnis mit dem Taschenrechner.

a) $0{,}6^3 \approx \square$

b) $0{,}8^3 \approx \square$

c) $\sqrt[3]{0{,}2} \approx \square$

d) $\sqrt[3]{0{,}4} \approx \square$



Die **Wurzelfunktion** $\boldsymbol{g}$ mit $\boldsymbol{g(x) = \sqrt[3]{x}}$ ist
die Umkehrfunktion der Potenzfunktion f.

Die Graphen von f und g sind also an der 1. Mediane gespiegelt.

Zu jedem Punkt $(x \mid x^3)$ am Graphen von f liegt
der gespiegelte Punkt $(x^3 \mid x)$ am Graphen von g.

Tatsächlich gilt ja eben $g(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$.