Potenzen mit natürlichen Exponenten

Wir verwenden die Potenzschreibweise, um uns Schreibarbeit zu ersparen:

$$\boldsymbol{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}}$$

Die Schreibweise a^9 ist praktischer als $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$.
Sprechweise: „*a hoch n*“ oder manchmal die „*n-te Potenz von a*“

Die Zahl a heißt **Basis**, die Zahl n heißt **Exponent**.

Potenzen von Hand berechnen

Berechne ohne Taschenrechner.

1) $2^3 =$ ____ **2)** $3^2 =$ ____ **3)** $5^1 =$ ____ **4)** $1^5 =$ ____ **5)** $0^2 =$ ____ **6)** $(-1)^3 =$ ____

Rechenregeln für Potenzen

Die folgenden Rechenregeln gelten für alle natürlichen Exponenten. $m, n \in \mathbb{N}$
Überprüfe die Rechenregeln, wenn $n = 3$ und $m = 2$ ist.

1) $\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$

2) $\boldsymbol{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$

3) $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

4) $\boldsymbol{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$

Keine Rechenregel für Potenzen

Berechne $(3+4)^2 =$ ________ und $3^2 + 4^2 =$ ________ .

Im Allgemeinen gilt: $(a+b)^n \neq a^n + b^n$ Können die Zahlen gleich sein? Mehr dazu ist am AB – Pascalsches Dreieck I.

Welche Zahl ist 2^{-3} ?

Als Nächstes wollen wir a^n für alle *ganzen* Zahlen n definieren. $n \in \mathbb{Z}$
Damit die Rechenregeln für Potenzen und Brüche weiter gelten, haben wir dafür nur eine Möglichkeit.
Setze das Muster bis zur Potenz 2^{-3} nach links fort:

$$\begin{tikzcd} \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^1 \arrow[l, bend right, ": 2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^2 \arrow[l, bend right, ": 2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^3 \arrow[l, bend right, ": 2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^4 \arrow[l, bend right, ": 2"'] & \ldots \end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow\ 2^0 = \frac{2^1}{2} =$ ____

$\Longrightarrow\ 2^{-1} = \frac{2^0}{2} = \frac{\square}{\square} =$ ____

$\Longrightarrow\ 2^{-2} = \frac{2^{-1}}{2} = 2^{-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{\square}} =$ ____

$\Longrightarrow\ 2^{-3} = \frac{2^{-2}}{2} = 2^{-2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{\square}} =$ ____

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Für Potenzen mit Basis $a \neq 0$ definieren wir:

$$\boldsymbol{a^0 = 1 \qquad a^{-1} = \frac{1}{a^1} \qquad a^{-2} = \frac{1}{a^2} \qquad a^{-3} = \frac{1}{a^3} \qquad \cdots \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Rechenregel für Potenzen

Die folgende Rechenregel gilt für alle ganzzahligen Exponenten n und m: $\boldsymbol{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$ $\quad m, n \in \mathbb{Z}$

Überprüfe die Rechenregel, wenn…

1) … $n = 5$ und $m = 2$ ist.

2) … $n = 3$ und $m = 3$ ist.

3) … $n = 2$ und $m = 5$ ist.

4) … $n = -2$ und $m = -3$ ist.

Rechnen mit Potenzen

Schreibe den Term in der Form $a^x \cdot b^y \cdot c^z$ mit $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

a) $\dfrac{(a^3 \cdot b^2)^4 \cdot c^{-2}}{a \cdot b^3 \cdot c^7} =$

b) $\left(\dfrac{a^2 \cdot c}{b^3}\right)^3 \cdot \dfrac{b}{a^{-1} \cdot c^{-2}} =$

c) $a^3 \cdot \left(\dfrac{b^5}{a \cdot c^{42}}\right)^0 \cdot \left((b^2)^3\right)^4 \cdot \dfrac{1}{c} =$

n-te Wurzel

Die Gleichung $\boldsymbol{x^n = a}$ hat für jede Zahl $a \geq 0$ und jede natürliche Zahl $n \geq 1$ genau eine Lösung $x \geq 0$.

Wir kürzen diese Lösung x mit $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$ ab und nennen sie die **n-te Wurzel aus a**.

Bei $n = 2$ sprechen wir auch von der Quadratwurzel und schreiben $\sqrt{a}$ statt $\sqrt[2]{a}$.

Es gilt also: $\boldsymbol{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$

„n-te Wurzel" und „hoch n" heben einander auf, wenn $a \geq 0$ ist.

Wurzeln von Hand berechnen

Berechne ohne Taschenrechner.

1) $\sqrt[3]{8} =$

4) $\sqrt{230687^2} =$

7) $\sqrt[42]{0} =$

2) $\sqrt{9} =$

5) $\sqrt[3]{42^{42}} =$

8) $\sqrt{\frac{9}{25}} =$

3) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} =$

6) $\sqrt[42]{1} =$

9) $\sqrt{(-2)^2} =$

$\sqrt{(-2)^2} = ?$

Die Gleichung $x^2 = 4$ hat genau 2 Lösungen, nämlich $x = \pm\sqrt{4}$, also $x_1 =$ ______ und $x_2 =$ ______.

Mit $\sqrt{4}$ ist *immer* die *positive* Lösung gemeint, also $\sqrt{4} = 2$.

Wenn $a \geq 0$ ist, dann gilt $\sqrt{a^2} = a$.

Wenn $a < 0$ ist, dann gilt $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a$.

Allgemein gilt also: $\boldsymbol{\sqrt{a^2} = |a|}$

Also ist $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$.

Mehr zu Beträgen findest du am UB – Betrags(un)gleichungen.

Wurzeln aus negativen Zahlen

Der Ausdruck $\sqrt{-4}$ ist sinnlos, weil die Gleichung $x^2 = -4$ *keine* reelle Lösung hat.

Tatsächlich hat die Gleichung 2 Lösungen, die keine reellen Zahlen, sondern komplexe Zahlen sind.
Dem Ausdruck $\pm\sqrt{-4}$ kann man dann einen Sinn geben. Mehr dazu findest du am Arbeitsblatt – Komplexe Zahlen.

Ausdrücken wie $\sqrt[3]{-8}$ kann man einen Sinn geben,
weil die Gleichung $x^3 = -8$ genau eine reelle Lösung hat, nämlich ______ .

Potenzfunktion und Wurzelfunktion

Rechts siehst du den Graphen der Potenzfunktion $f(x) = x^3$ für $x \geq 0$.

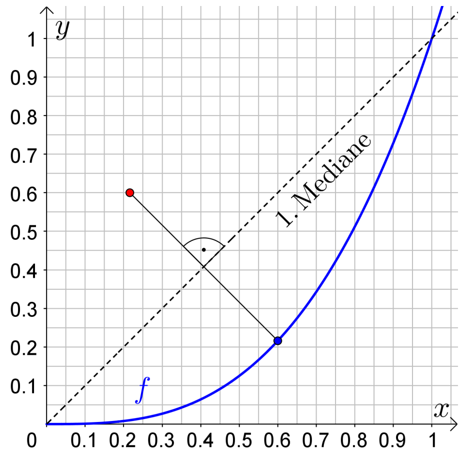
1) Lies die folgenden Zahlen so genau wie möglich ab.
Vergleiche dein Ergebnis mit dem Taschenrechner:

a) $0{,}6^3 \approx$

b) $0{,}8^3 \approx$

c) $\sqrt[3]{0{,}2} \approx$

d) $\sqrt[3]{0{,}4} \approx$



2) Die Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ist die Umkehrfunktion von $f(x) = x^3$.
Die Graphen von f und g sind also an der 1. Mediane gespiegelt.
Zu jedem Punkt $(x \mid x^3)$ am Graphen von f liegt der gespiegelte Punkt $(x^3 \mid x)$ am Graphen von g.
Zeichne den Graphen von g oben ein.

Welche Zahl ist $9^{\frac{3}{2}}$?

Als Nächstes wollen wir $a^{\frac{m}{n}}$ für alle *rationalen* Exponenten definieren. Welche Zahl ist z.B. $9^{\frac{3}{2}}$?
Damit die Rechenregeln für Potenzen und Brüche weiter gelten, haben wir dafür nur eine Möglichkeit.
Die beiden *positiven* Zahlen $9^{\frac{3}{2}}$ und $\sqrt[2]{9^3}$ ergeben nämlich beide mit sich selbst multipliziert 9^3:

$$\left(9^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 9^{\frac{3}{2}\cdot 2} = 9^3 \quad \text{und} \quad \left(\sqrt[2]{9^3}\right)^2 = \sqrt[2]{9^3}\cdot\sqrt[2]{9^3} = 9^3$$

Die beiden Zahlen sind also gleich.

Damit muss $9^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{9^3} = 27$ sein.

Kontrolliere mit dem Taschenrechner.

Potenzen mit rationalen Exponenten

Für Potenzen mit Basis $a \geq 0$ und rationalem Exponenten $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 1$ definieren wir:

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Wurzel → Potenz

Schreibe den Term in der Form $a^{\frac{m}{n}}$ an.

1) $\sqrt{a^3} =$

2) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^2}} =$

3) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}} =$

4) $\sqrt[4]{\sqrt[2]{a}} =$

Potenz → Wurzel

Schreibe den Term in der Form $\sqrt[n]{a^m}$ an.

1) $a^{\frac{7}{5}} =$

2) $\dfrac{1}{a^{\frac{3}{2}}} =$

3) $\dfrac{a}{\sqrt{a}} =$

4) $\dfrac{a^2 \cdot \sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a^{-2}}} =$

Rechenregeln für Wurzeln

Es sind $a \geq 0$ und $b \geq 0$. Vereinfache jeweils so weit wie möglich:

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n =$$

$$(\sqrt[n]{a})^{n \cdot k} = \left((\sqrt[n]{a})^n\right)^k =$$

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m \cdot n} =$$

Erkläre damit die Rechenregeln für das Wurzelziehen:

1) $\boldsymbol{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$

2) $\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m}$

3) $\boldsymbol{\sqrt[n \cdot k]{a^k} = \sqrt[n]{a}}$

4) $\boldsymbol{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}}$

Keine Rechenregel für Wurzeln

Berechne $\sqrt{16 + 9} =$ ______________ und $\sqrt{16} + \sqrt{9} =$ ______________ .

Im Allgemeinen gilt: $\sqrt[n]{a + b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ Können die Zahlen gleich sein?

Rechnen mit Wurzeln

Schreibe den Term in der Form $a^x \cdot b^y \cdot c^z$ mit $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Du kannst entweder die Rechenregeln für Wurzeln verwenden oder in Potenzschreibweise rechnen.

$$\frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{b \cdot c^4}}{a^5 \cdot \sqrt[6]{b^2 \cdot c^{-2}}} =$$

Welche Zahl ist $3^{\sqrt{2}}$?

$\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl. Wir können sie also nicht als Bruch darstellen.
Welche Zahl ist dann $3^{\sqrt{2}} = 3^{1{,}414213\ldots}$? Berechne mit dem Taschenrechner:

1) $a_1 = 3^1 =$

2) $a_2 = 3^{1{,}4} = 3^1 \cdot 3^{\frac{4}{10}} = a_1 \cdot \sqrt[10]{3^4} =$

3) $a_3 = 3^{1{,}41} = 3^{1{,}4} \cdot 3^{\frac{1}{100}} = a_2 \cdot \sqrt[100]{3} =$

4) $a_4 = 3^{1{,}414} = a_3 \cdot \sqrt[1000]{3^4} =$

5) $a_5 = 3^{1{,}4142} = a_4 \cdot \sqrt[10000]{3^2} =$

Warum muss $\sqrt[n]{3^m} \geq 1$ für alle $n \geq 1$ und $m \geq 0$ gelten?

Mit jeder zusätzlichen Nachkommastelle wird das Ergebnis größer oder bleibt gleich groß.
Die Ergebnisse bleiben aber stets kleiner als $3^2 = 9$.

In der Mathematik sagen wir dazu:
„Die Folge $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt. Der Grenzwert dieser Folge ist $3^{\sqrt{2}}$.“

Mehr dazu findest du am AB – Grenzwerte.