



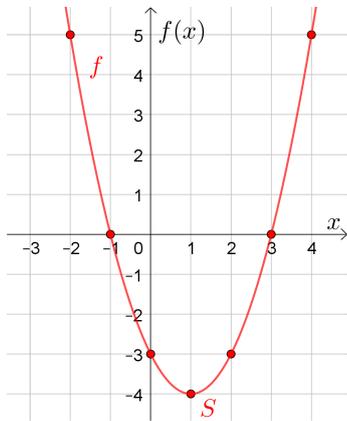
Jede Funktion f mit

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad \text{mit } a \neq 0$$

heißt **quadratische Funktion**.

Welchen Funktionstyp hätte f mit $a = 0$?

Parabel / Scheitelpunkt



Für die quadratische Funktion f gilt:

$$f(x) = x^2 - 2 \cdot x - 3$$

Vervollständige die Wertetabelle der Funktion f .

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

⚠

$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$$

$$-2^2 = -(2 \cdot 2) = -4$$

Der Funktionsgraph ist eine sogenannte **Parabel**. Skizziere sie links. Den **Extrempunkt** $(1 \mid -4)$ nennt man auch **Scheitelpunkt** der Parabel.

Minus mal minus



An welcher Stelle $x \in \mathbb{R}$ ist der Funktionswert $f(x)$ am *kleinsten*? Begründe deine Antwort.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = (x - 3)^2$ c) $f(x) = 5 \cdot (x + 4)^2 + 2$

- a) An der Stelle $x = 0$ nimmt f den kleinsten Funktionswert $f(0) = 0$ an.
Begründung: Es gilt $x^2 \geq 0$ und $x^2 = 0$, falls $x = 0$ ist.
- b) An der Stelle $x = 3$ nimmt f den kleinsten Funktionswert $f(3) = 0$ an.
Begründung: Es gilt $(x - 3)^2 \geq 0$ und $(x - 3)^2 = 0$, falls $x = 3$ ist.
- c) An der Stelle $x = -4$ nimmt f den kleinsten Funktionswert $f(-4) = 2$ an.
Begründung: Je kleiner \ominus ist, desto kleiner ist auch $5 \cdot \ominus + 2$.
Es gilt $(x + 4)^2 \geq 0$ und $(x + 4)^2 = 0$, falls $x = -4$ ist.

Quadratische Funktion – Scheitelpunktform

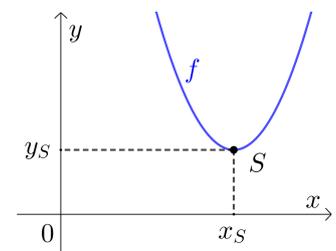


Jede quadratische Funktion kann auch in der sogenannten **Scheitelpunktform**

$$f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$$

angegeben werden. Erkläre anhand der Funktionsgleichung, warum der Funktionsgraph den **Scheitelpunkt** $S = (x_S \mid y_S)$ hat.

Es gilt $(x - x_S)^2 \geq 0$ und $(x - x_S)^2 = 0$, falls $x = x_S$ ist.
 $f(x_S) = a \cdot 0^2 + y_S = y_S$



Streiche jeweils so durch, dass eine wahre Aussage entsteht:

- 1) Wenn $a > 0$ ist, dann ist y_S der kleinste/~~größte~~ Funktionswert von f . Die Parabel ist dann nach oben/~~unten~~ geöffnet.
- 2) Wenn $a < 0$ ist, dann ist y_S der ~~kleinste~~/größte Funktionswert von f . Die Parabel ist dann nach ~~oben~~/unten geöffnet.
- 3) Je größer $|a|$ ist, desto schmaler/~~breiter~~ ist die Parabel.

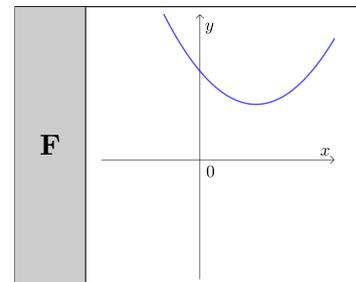
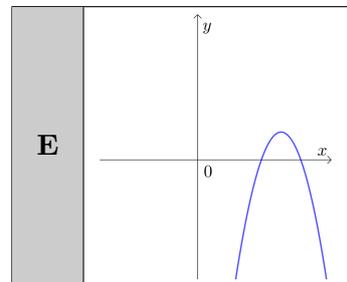
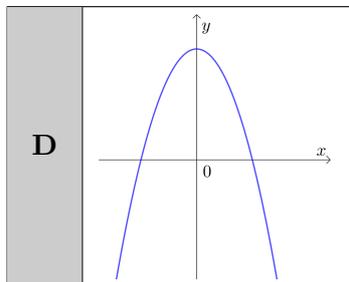
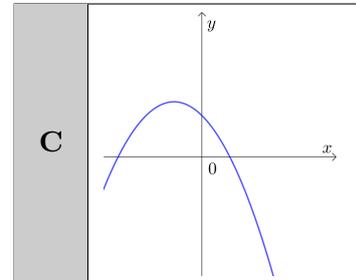
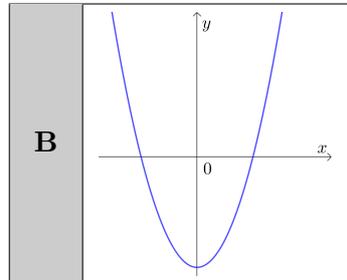
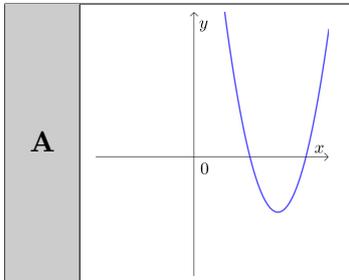
Scheitelpunktform → Funktionsgraph



Ordne den Funktionsgleichungen den entsprechenden Funktionsgraphen zu.

$f_1(x) = x^2 - 4$	B
$f_2(x) = 0,3 \cdot (x - 2)^2 + 2$	F
$f_3(x) = 2 \cdot (x - 3)^2 - 2$	A

$f_4(x) = -2 \cdot (x - 3)^2 + 1$	E
$f_5(x) = -0,5 \cdot (x + 1)^2 + 2$	C
$f_6(x) = -x^2 + 4$	D



Funktionsgraph → Scheitelpunktform



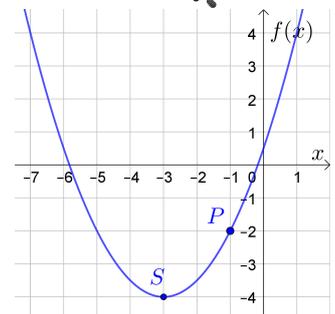
Rechts ist der Graph einer quadratischen Funktion f dargestellt. Ermittle die Funktionsgleichung von f in Scheitelpunktform.

$$f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$$

$$S = (-3 \mid -4) \implies f(x) = a \cdot (x + 3)^2 - 4$$

$$P = (-1 \mid -2) \implies f(-1) = -2 \implies a \cdot 2^2 - 4 = -2 \implies a = 0,5$$

$$\implies f(x) = 0,5 \cdot (x + 3)^2 - 4$$



Binomische Formeln



Erinnere dich an die **Binomischen Formeln**:

$$\text{i) } (a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad \text{ii) } (a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Scheitelpunktform → Polynomform



Wandle die quadratische Funktion f mit Scheitelpunktform

$$f(x) = -3 \cdot (x - 1)^2 - 4$$

in die **Polynomform** $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ um.

$$f(x) = -3 \cdot (x^2 - 2 \cdot x + 1) - 4 = -3 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 7$$

Beim **quadratischen Ergänzen** verwenden wir die Binomischen Formeln „rückwärts“. Trage jeweils Zahlen so in die Kästchen ein, dass die Terme auf beiden Seiten äquivalent sind.

a) $x^2 + 6 \cdot x = (x + 3)^2 - 9$

d) $x^2 + 4 \cdot x = (x + 2)^2 - 4$

b) $x^2 - 8 \cdot x = (x - 4)^2 - 16$

e) $x^2 - 6 \cdot x = (x - 3)^2 - 9$

c) $x^2 + 5 \cdot x = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

f) $x^2 - 7 \cdot x = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$

Die **Polynomform** $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ einer quadratischen Funktion f kannst du immer mit den gleichen Schritten in die **Scheitelpunktform** $f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ umwandeln.

Führe die folgenden Schritte für die Funktion f mit $f(x) = 5 \cdot x^2 - 30 \cdot x + 3$ durch.

- i) Beim Term $a \cdot x^2 + b \cdot x$ den Koeffizienten a herausheben:

$$f(x) = 5 \cdot [x^2 - 6 \cdot x] + 3$$

- ii) Den Term $x^2 + \frac{b}{a} \cdot x$ in der Klammer quadratisch ergänzen:

$$f(x) = 5 \cdot [(x - 3)^2 - 9] + 3$$

- iii) Die äußere Klammer ausmultiplizieren und vereinfachen:

$$f(x) = 5 \cdot (x - 3)^2 - 45 + 3 = 5 \cdot (x - 3)^2 - 42$$

Die quadratische Funktion $f(x) = 5 \cdot x^2 - 30 \cdot x + 3$ hat also den Scheitelpunkt $S = (3 \mid -42)$.

Die Flugbahn eines Tennisballs wird durch den Graphen einer quadratischen Funktion h modelliert:

$$h(x) = -0,01 \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

x ... horizontal zurückgelegte Wegstrecke in m

$h(x)$... Höhe über dem Boden an der Stelle x in m

Der Tennisball wird 40 cm über dem Boden abgeschlagen und trifft in 20 m horizontaler Entfernung von der Abschlagstelle am Boden auf.

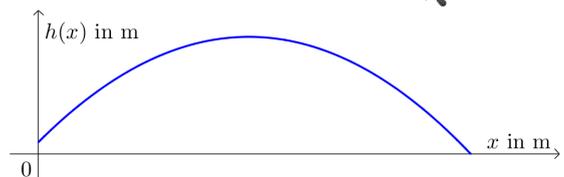
- 1) Ermittle die Koeffizienten b und c .
- 2) Berechne den höchsten Punkt der Flugbahn.

1) $h(0) = 0,4 \implies c = 0,4$

$$h(20) = 0 \implies -0,01 \cdot 20^2 + b \cdot 20 + 0,4 = 0 \implies b = 0,18$$

2) $h(x) = -0,01 \cdot x^2 + 0,18 \cdot x + 0,4 = -0,01 \cdot [x^2 - 18 \cdot x] + 0,4 =$
 $= -0,01 \cdot [(x - 9)^2 - 81] + 0,4 = -0,01 \cdot (x - 9)^2 + 1,21$

Der höchste Punkt der Flugkurve ist der Scheitelpunkt (9 m | 1,21 m).





Der Graph der quadratischen Funktion f mit

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

enthält die Punkte $A = (-4 | -6)$, $B = (-2 | 24)$ und $C = (4 | 18)$.

Stelle ein **Gleichungssystem** zur Berechnung der Koeffizienten a , b und c auf.

Löse das Gleichungssystem und gib die Polynomform von f an.

$$\text{I: } f(-4) = -6 \implies 16 \cdot a - 4 \cdot b + c = -6$$

$$\text{II: } f(-2) = 24 \implies 4 \cdot a - 2 \cdot b + c = 24$$

$$\text{III: } f(4) = 18 \implies 16 \cdot a + 4 \cdot b + c = 18$$

Wir eliminieren c mithilfe von I:

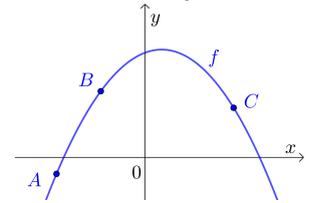
$$\text{II}^* = \text{I} - \text{II}: 12 \cdot a - 2 \cdot b = -30$$

$$\text{III}^* = \text{I} - \text{III}: -8 \cdot b = -24 \implies b = 3$$

$$\xrightarrow{\text{II}^*} 12 \cdot a - 2 \cdot 3 = -30 \implies a = -2$$

$$\xrightarrow{\text{I}} c = -6 - 16 \cdot a + 4 \cdot b = 38$$

$$\implies f(x) = -2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 38$$



Links, rechts, oben oder unten?



Wir können den Graphen jeder reellen Funktion f im Koordinatensystem beliebig verschieben:

$x \mapsto f(x) + d$ mit $d > 0$ verschiebt den Graphen von f um d Einheiten nach **oben**.

$x \mapsto f(x) - d$ mit $d > 0$ verschiebt den Graphen von f um d Einheiten nach **unten**.

$x \mapsto f(x + c)$ mit $c > 0$ verschiebt den Graphen von f um c Einheiten nach **links**.

$x \mapsto f(x - c)$ mit $c > 0$ verschiebt den Graphen von f um c Einheiten nach **rechts**.

Mehr dazu findest du auf dem [Arbeitsblatt – Verschiebung und Skalierung von Funktionsgraphen](#).

Scheitelpunktform grafisch erklärt



Der Scheitelpunkt der quadratischen Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2$ ist $(0 | 0)$.

Der Graph von g entsteht durch Verschiebung des Graphen von f um x_S Einheiten nach rechts und um y_S Einheiten nach oben.

Der Scheitelpunkt von g ist dann also $S = (x_S | y_S)$.

Für die Funktionsgleichung von g gilt:

$$g(x) = f(x - x_S) + y_S = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$$

