Quadratische Funktion – Polynomform MmF

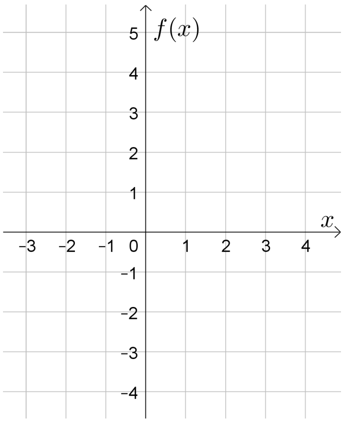
Jede Funktion f mit

$$\boldsymbol{f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c} \qquad \text{mit } a \neq 0$$

heißt **quadratische Funktion**.

Welchen Funktionstyp hätte f mit $a = 0$?

Parabel / Scheitelpunkt MmF



Für die quadratische Funktion f gilt:

$$f(x) = x^2 - 2 \cdot x - 3$$

$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$

$-2^2 = -(2 \cdot 2) = -4$

Vervollständige die Wertetabelle der Funktion f.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$							

Der Funktionsgraph ist eine sogenannte **Parabel**. Skizziere sie links.
Den Extrempunkt $(1 \mid -4)$ nennt man auch **Scheitelpunkt** der Parabel.

Minus mal minus MmF

An welcher Stelle $x \in \mathbb{R}$ ist der Funktionswert $f(x)$ am *kleinsten*? Begründe deine Antwort.

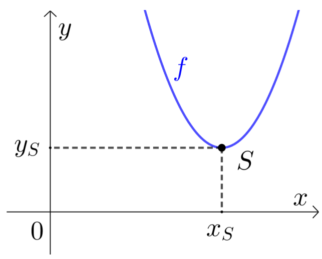
a) $f(x) = x^2$ **b)** $f(x) = (x-3)^2$ **c)** $f(x) = 5 \cdot (x+4)^2 + 2$

Quadratische Funktion – Scheitelpunktform MmF

Jede quadratische Funktion kann auch in der sogenannten **Scheitelpunktform**

$$\boldsymbol{f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S}$$

angegeben werden. Erkläre anhand der Funktionsgleichung, warum der Funktionsgraph den **Scheitelpunkt** $\boldsymbol{S = (x_S \mid y_S)}$ hat.



Streiche jeweils so durch, dass eine wahre Aussage entsteht:

1) Wenn $a > 0$ ist, dann ist y_S der kleinste/größte Funktionswert von f.
Die Parabel ist dann nach oben/unten geöffnet.

2) Wenn $a < 0$ ist, dann ist y_S der kleinste/größte Funktionswert von f.
Die Parabel ist dann nach oben/unten geöffnet.

3) Je größer $|a|$ ist, desto schmäler/breiter ist die Parabel.

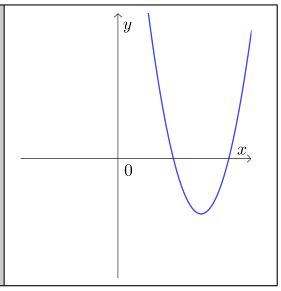
Scheitelpunktform → Funktionsgraph

Ordne den Funktionsgleichungen den entsprechenden Funktionsgraphen zu.

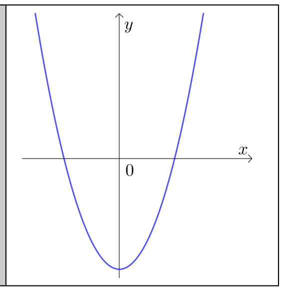
$f_1(x) = x^2 - 4$	
$f_2(x) = 0{,}3 \cdot (x-2)^2 + 2$	
$f_3(x) = 2 \cdot (x-3)^2 - 2$	

$f_4(x) = -2 \cdot (x-3)^2 + 1$	
$f_5(x) = -0{,}5 \cdot (x+1)^2 + 2$	
$f_6(x) = -x^2 + 4$	

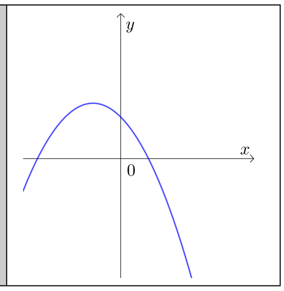
A



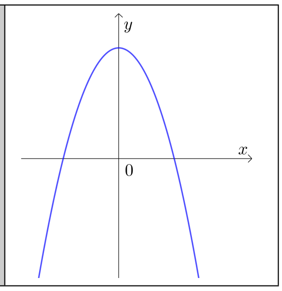
B



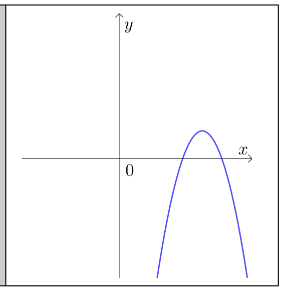
C



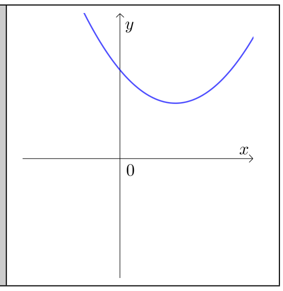
D



E

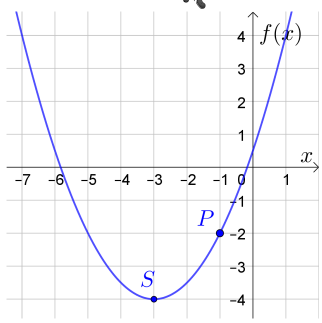


F



Funktionsgraph → Scheitelpunktform

Rechts ist der Graph einer quadratischen Funktion f dargestellt.
Ermittle die Funktionsgleichung von f in Scheitelpunktform.



Binomische Formeln

Erinnere dich an die Binomischen Formeln:

i) $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) =$ ____________

ii) $(a-b)^2 = (a-b) \cdot (a-b) =$ ____________

Scheitelpunktform → Polynomform

Wandle die quadratische Funktion f mit Scheitelpunktform

$$f(x) = -3 \cdot (x-1)^2 - 4$$

in die **Polynomform** $\boldsymbol{f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$ um.

Quadratisches Ergänzen

Beim **quadratischen Ergänzen** verwenden wir die Binomischen Formeln „rückwärts“.
Trage jeweils Zahlen so in die Kästchen ein, dass die Terme auf beiden Seiten äquivalent sind.

a) $x^2 + 6 \cdot x = (x+3)^2 - \boxed{}$

b) $x^2 - 8 \cdot x = (x-4)^2 - \boxed{}$

c) $x^2 + 5 \cdot x = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$

d) $x^2 + 4 \cdot x = \left(x + \boxed{}\right)^2 - \boxed{}$

e) $x^2 - 6 \cdot x = \left(x - \boxed{}\right)^2 - \boxed{}$

f) $x^2 - 7 \cdot x = \left(x - \frac{\boxed{}}{\boxed{}}\right)^2 - \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$

Polynomform → Scheitelpunktform

Die **Polynomform** $\boldsymbol{f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$ einer quadratischen Funktion f kannst du immer mit den gleichen Schritten in die **Scheitelpunktform** $\boldsymbol{f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S}$ umwandeln.

Führe die folgenden Schritte für die Funktion f mit $f(x) = 5 \cdot x^2 - 30 \cdot x + 3$ durch.

i) Beim Term $a \cdot x^2 + b \cdot x$ den Koeffizienten a herausheben:

$f(x) = \boxed{}$

ii) Den Term $x^2 + \frac{b}{a} \cdot x$ in der Klammer quadratisch ergänzen:

$f(x) = \boxed{}$

iii) Die äußere Klammer ausmultiplizieren und vereinfachen:

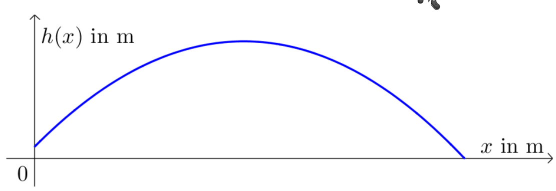
$f(x) = \boxed{}$

Die quadratische Funktion $f(x) = 5 \cdot x^2 - 30 \cdot x + 3$ hat also den Scheitelpunkt $S = \left(\boxed{} \mid \boxed{}\right)$.

Wurfparabel

Die Flugbahn eines Tennisballs wird durch den Graphen einer quadratischen Funktion h modelliert:

$$h(x) = -0{,}01 \cdot x^2 + b \cdot x + c$$



$x \ldots$ horizontal zurückgelegte Wegstrecke in m
$h(x) \ldots$ Höhe über dem Boden an der Stelle x in m

Der Tennisball wird 40 cm über dem Boden abgeschlagen und trifft in 20 m horizontaler Entfernung von der Abschlagstelle am Boden auf.

1) Ermittle die Koeffizienten b und c.

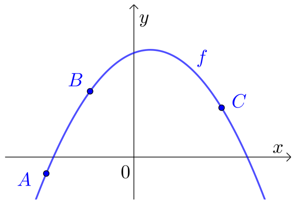
2) Berechne den höchsten Punkt der Flugbahn.

3 Punkte → Quadratische Funktion

Der Graph der quadratischen Funktion f mit

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

enthält die Punkte $A = (-4 \mid -6)$, $B = (-2 \mid 24)$ und $C = (4 \mid 18)$.
Stelle ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c auf.
Löse das Gleichungssystem und gib die Polynomform von f an.



Links, rechts, oben oder unten?

Wir können den Graphen jeder reellen Funktion f im Koordinatensystem beliebig verschieben:

$\boldsymbol{x \mapsto f(x) + d}$ mit $d > 0$ verschiebt den Graphen von f um $\boxed{}$ Einheiten nach ________.

$\boldsymbol{x \mapsto f(x) - d}$ mit $d > 0$ verschiebt den Graphen von f um $\boxed{}$ Einheiten nach ________.

$\boldsymbol{x \mapsto f(x + c)}$ mit $c > 0$ verschiebt den Graphen von f um $\boxed{}$ Einheiten nach ________.

$\boldsymbol{x \mapsto f(x - c)}$ mit $c > 0$ verschiebt den Graphen von f um $\boxed{}$ Einheiten nach ________.

Mehr dazu findest du auf dem Arbeitsblatt – Verschiebung und Skalierung von Funktionsgraphen.

Scheitelpunktform grafisch erklärt

Der Scheitelpunkt der quadratischen Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2$ ist $(\boxed{} \mid \boxed{})$.

Der Graph von g entsteht durch Verschiebung des Graphen von f um x_S Einheiten nach rechts und um y_S Einheiten nach oben.

Der Scheitelpunkt von g ist dann also $S = (\boxed{} \mid \boxed{})$.

Für die Funktionsgleichung von g gilt:

$$g(x) = f(x - \boxed{}) + \boxed{} = a \cdot (x - \boxed{})^2 + \boxed{}$$