


Jede Gleichung der Form

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad \text{mit } a \neq 0$$

ist eine **quadratische Gleichung**. Die Zahlen a , b und c sind die **Koeffizienten** der Gleichung.

Lösung ↔ Nullstelle 

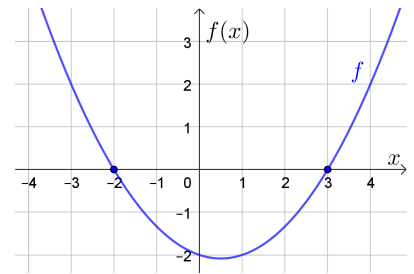
Die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\frac{1}{3} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x - 2 = 0 \quad a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}, c = -2$$

sollen ermittelt werden. Wir fassen die linke Seite der Gleichung als Funktionsterm der **quadratischen Funktion** f mit

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x - 2$$


auf. Rechts ist der Funktionsgraph von f dargestellt.

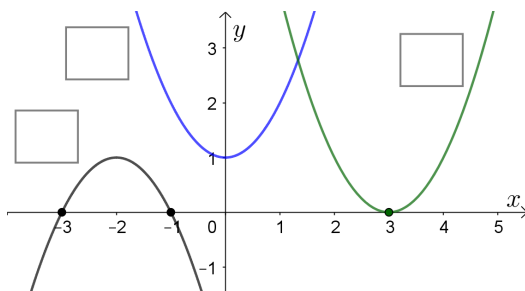


Die Lösungen der quadratischen Gleichung $f(x) = 0$ sind die **Nullstellen** von f .

Diese quadratische Gleichung hat also die zwei Lösungen $x_1 = \boxed{}$ und $x_2 = \boxed{}$.

Wie viele reelle Lösungen kann eine quadratische Gleichung allgemein haben?

Wie viele Lösungen gibt es? 



Für die Funktionen f , g und h gilt:

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$g(x) = x^2 - 6 \cdot x + 9 = (x - 3)^2$$


$$h(x) = -x^2 - 4 \cdot x - 3$$

Beschrifte links die Graphen dieser Funktionen.

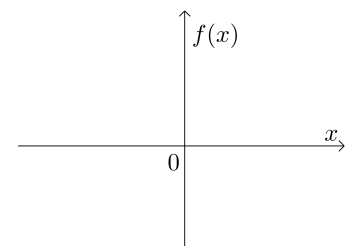
Die quadratische Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat also _____ Lösung in \mathbb{R} .

Die quadratische Gleichung $x^2 - 6 \cdot x + 9 = 0$ hat also _____ Lösung in \mathbb{R} .

Die quadratische Gleichung $-x^2 - 4 \cdot x - 3 = 0$ hat also _____ Lösungen in \mathbb{R} .


Spezialfall: $b = 0$ 

Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung $\frac{1}{9} \cdot x^2 - 4 = 0$.

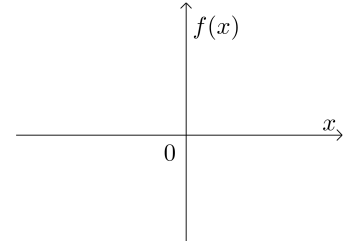


Diese quadratische Gleichung hat also die zwei Lösungen $x_1 = \boxed{}$ und $x_2 = \boxed{}$.

Skizziere rechts oben den Graphen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{9} \cdot x^2 - 4$.

Spezialfall: $c = 0$ 

Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung $3 \cdot x^2 + 12 \cdot x = 0$ durch Herausheben von x .



Diese quadratische Gleichung hat also die zwei Lösungen $x_1 = \boxed{}$ und $x_2 = \boxed{}$.

Skizziere rechts oben den Graphen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot x^2 + 12 \cdot x$.

Äquivalenzumformungen  **MmF**


Unten versucht Lukas die quadratische Gleichung $3 \cdot x^2 + 12 \cdot x = 0$ anders zu lösen.
In welchem Rechenschritt ist ihm die zweite Lösung verloren gegangen?

$$\begin{array}{l|l} 3 \cdot x^2 + 12 \cdot x = 0 & | -12 \cdot x \\ 3 \cdot x^2 = -12 \cdot x & | :3 \\ x^2 = -4 \cdot x & | :x \\ x = -4 & \end{array}$$

Sackgassen  **MmF**

Bei der quadratischen Gleichung $x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0$ sind *alle* Koeffizienten ungleich 0.
Hier kommen wir mit unseren bisherigen Lösungsansätzen *nicht* weiter:

$$\begin{array}{l} x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0 \iff x^2 = -2 \cdot x + 15 \iff x = \pm \sqrt{-2 \cdot x + 15} \iff !? \\ x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0 \iff x^2 + 2 \cdot x = 15 \iff x \cdot (x + 2) = 15 \iff !? \end{array}$$

Quadratisches Ergänzen  **MmF**

Bei Gleichungen der Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$ hilft **quadratisches Ergänzen** weiter.
Rechts unten sind die zielführenden Umformungen allgemein durchgeführt.
Führe links unten diese Umformungen für $x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0$ durch.

$x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0$	$x^2 + p \cdot x + q = 0$
	$x^2 + p \cdot x = -q$
	$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q$
	$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$
	$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
	$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Diese quadratische Gleichung hat also die zwei Lösungen $x_1 = \boxed{}$ und $x_2 = \boxed{}$.

Die Lösung(en) der quadratischen Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ kannst du auch direkt

mit der **kleinen Lösungsformel** berechnen: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Versuche die Nullstellen der Funktionen f , g und h mit der kleinen Lösungsformel zu berechnen.

1) $\underbrace{x^2 - 6 \cdot x + 8 = 0}_{=f(x)}$

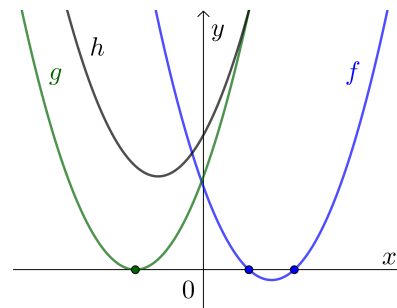
$p = \square$ $q = \square$

2) $\underbrace{x^2 + 6 \cdot x + 9 = 0}_{=g(x)}$

$p = \square$ $q = \square$

3) $\underbrace{x^2 + 4 \cdot x + 13 = 0}_{=h(x)}$

$p = \square$ $q = \square$



Die Anzahl der Lösungen von $x^2 + p \cdot x + q = 0$ hängt von der **Diskriminante** $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ ab.

- 1) Wenn $D > 0$ gilt, dann hat die quadratische Gleichung _____ Lösungen in \mathbb{R} .
- 2) Wenn $D = 0$ gilt, dann hat die quadratische Gleichung _____ Lösung in \mathbb{R} .
- 3) Wenn $D < 0$ gilt, dann hat die quadratische Gleichung _____ Lösung in \mathbb{R} .

Die Gleichung $4 \cdot x^2 - 16 \cdot x - 9 = 0$ können wir *nicht* direkt mit der kleinen Lösungsformel lösen. Dafür müssen wir zuerst die Gleichung durch den Koeffizienten $a = 4$ dividieren:

$$x^2 - 4 \cdot x - \frac{9}{4} = 0$$

Löse diese Gleichung durch quadratisches Ergänzen oder mit der kleinen Lösungsformel.

Große Lösungsformel 

Die Lösung(en) der quadratischen Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ kannst du auch direkt

mit der **großen Lösungsformel** berechnen: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

★ Setze zur Herleitung der großen Lösungsformel die normierten Koeffizienten $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ in die kleine Lösungsformel ein.

Große Lösungsformel 

Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung $4 \cdot x^2 = 16 \cdot x + 9$ mit der großen Lösungsformel.

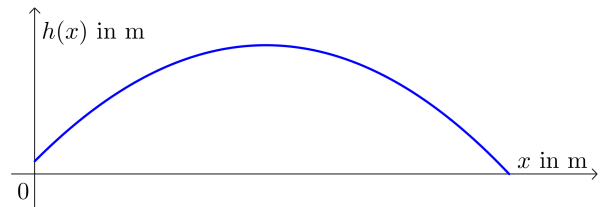
Wurfparabel 

Die Flugbahn eines Tennisballs wird durch den Graphen einer quadratischen Funktion h modelliert:

$$h(x) = -0,01 \cdot x^2 + 0,18 \cdot x + 0,4$$

x ... horizontal zurückgelegte Wegstrecke in m
 $h(x)$... Höhe über dem Boden an der Stelle x in m

Berechne den Aufprallpunkt am Boden.



Sekante 

Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = 0,5 \cdot x^2 - 1,5 \cdot x + 2$

Für die lineare Funktion g gilt: $g(x) = -0,5 \cdot x + 6$

Berechne die eingezeichneten **Schnittpunkte** S_1 und S_2 .

