Quadratische Gleichungen

Jede Gleichung der Form

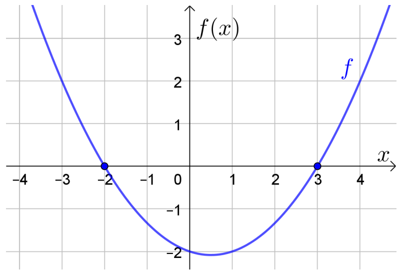
$$\boldsymbol{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0} \qquad \text{mit } a \neq 0$$

ist eine **quadratische Gleichung**. Die Zahlen a, b und c sind die **Koeffizienten** der Gleichung.

Lösung ↔ Nullstelle

Die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\boldsymbol{\frac{1}{3} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x - 2 = 0} \qquad a = \tfrac{1}{3},\ b = -\tfrac{1}{3},\ c = -2$$



sollen ermittelt werden. Wir fassen die linke Seite der Gleichung als Funktionsterm der quadratischen Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x - 2$$

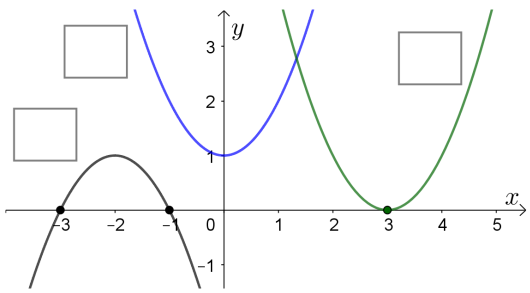
auf. Rechts ist der Funktionsgraph von f dargestellt.

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $\boldsymbol{f(x) = 0}$ sind die Nullstellen von f.

Diese quadratische Gleichung hat also die zwei Lösungen $x_1 = \boxed{}$ und $x_2 = \boxed{}$.

Wie viele reelle Lösungen kann eine quadratische Gleichung allgemein haben?

Wie viele Lösungen gibt es?



Für die Funktionen f, g und h gilt:

$$f(x) = x^2 + 1$$
$$g(x) = x^2 - 6 \cdot x + 9 = (x-3)^2$$
$$h(x) = -x^2 - 4 \cdot x - 3$$

Beschrifte links die Graphen dieser Funktionen.

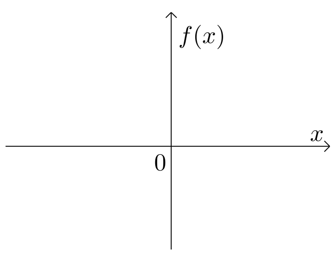
Die quadratische Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat also ____________ Lösung in $\mathbb{R}$.

Die quadratische Gleichung $x^2 - 6 \cdot x + 9 = 0$ hat also ____________ Lösung in $\mathbb{R}$.

Die quadratische Gleichung $-x^2 - 4 \cdot x - 3 = 0$ hat also ____________ Lösungen in $\mathbb{R}$.

Spezialfall: $b = 0$

Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung $\frac{1}{9} \cdot x^2 - 4 = 0$.

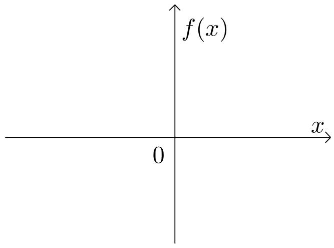


Diese quadratische Gleichung hat also die zwei Lösungen $x_1 = \boxed{}$ und $x_2 = \boxed{}$.

Skizziere rechts oben den Graphen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{9} \cdot x^2 - 4$.

Spezialfall: $c = 0$ MmF

Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung $3 \cdot x^2 + 12 \cdot x = 0$ durch Herausheben von x.



Diese quadratische Gleichung hat also die zwei Lösungen $x_1 = \boxed{}$ und $x_2 = \boxed{}$.

Skizziere rechts oben den Graphen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot x^2 + 12 \cdot x$.

Äquivalenzumformungen MmF

Unten versucht Lukas die quadratische Gleichung $3 \cdot x^2 + 12 \cdot x = 0$ anders zu lösen.
In welchem Rechenschritt ist ihm die zweite Lösung verloren gegangen?

$$
\begin{aligned}
3 \cdot x^2 + 12 \cdot x &= 0 && \mid -12 \cdot x \\
3 \cdot x^2 &= -12 \cdot x && \mid :3 \\
x^2 &= -4 \cdot x && \mid :x \\
x &= -4
\end{aligned}
$$

Sackgassen MmF

Bei der quadratischen Gleichung $x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0$ sind *alle* Koeffizienten ungleich 0.
Hier kommen wir mit unseren bisherigen Lösungsansätzen *nicht* weiter:

$$x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0 \iff x^2 = -2 \cdot x + 15 \iff x = \pm\sqrt{-2 \cdot x + 15} \iff \text{!?}$$

$$x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0 \iff x^2 + 2 \cdot x = 15 \iff x \cdot (x + 2) = 15 \iff \text{!?}$$

Quadratisches Ergänzen MmF

Bei Gleichungen der Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$ hilft quadratisches Ergänzen weiter.
Rechts unten sind die zielführenden Umformungen allgemein durchgeführt.
Führe links unten diese Umformungen für $x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0$ durch.

$$x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0$$

$$
\begin{aligned}
&x^2 + p \cdot x + q = 0 \\
&x^2 + p \cdot x = -q \\
&\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q \\
&\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\
&x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
&x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}
\end{aligned}
$$

Diese quadratische Gleichung hat also die zwei Lösungen $x_1 = \boxed{}$ und $x_2 = \boxed{}$.

Kleine Lösungsformel MmF

Die Lösung(en) der quadratischen Gleichung $\boldsymbol{x^2 + p \cdot x + q = 0}$ kannst du auch direkt mit der **kleinen Lösungsformel** berechnen: $\boldsymbol{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$

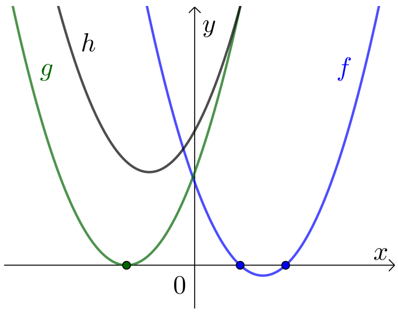
2, 1, 0 MmF

Versuche die Nullstellen der Funktionen f, g und h mit der kleinen Lösungsformel zu berechnen.

1) $\underbrace{x^2 - 6 \cdot x + 8}_{=f(x)} = 0$ $\qquad p = \boxed{} \qquad q = \boxed{}$

2) $\underbrace{x^2 + 6 \cdot x + 9}_{=g(x)} = 0$ $\qquad p = \boxed{} \qquad q = \boxed{}$

3) $\underbrace{x^2 + 4 \cdot x + 13}_{=h(x)} = 0$ $\qquad p = \boxed{} \qquad q = \boxed{}$



Diskriminante MmF

Die Anzahl der Lösungen von $x^2 + p \cdot x + q = 0$ hängt von der **Diskriminante** $\boldsymbol{D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ ab.

1) Wenn $D > 0$ gilt, dann hat die quadratische Gleichung __________ Lösungen in $\mathbb{R}$.

2) Wenn $D = 0$ gilt, dann hat die quadratische Gleichung __________ Lösung in $\mathbb{R}$.

3) Wenn $D < 0$ gilt, dann hat die quadratische Gleichung __________ Lösung in $\mathbb{R}$.

Normierung MmF

Die Gleichung $4 \cdot x^2 - 16 \cdot x - 9 = 0$ können wir *nicht* direkt mit der kleinen Lösungsformel lösen. Dafür müssen wir zuerst die Gleichung durch den Koeffizienten $a = 4$ dividieren:

$$x^2 - 4 \cdot x - \frac{9}{4} = 0$$

Löse diese Gleichung durch quadratisches Ergänzen oder mit der kleinen Lösungsformel.

Große Lösungsformel

Die Lösung(en) der quadratischen Gleichung $\boldsymbol{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0}$ kannst du auch direkt mit der **großen Lösungsformel** berechnen: $\boldsymbol{x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}}$

Setze zur Herleitung der großen Lösungsformel die normierten Koeffizienten $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ in die kleine Lösungsformel ein.

Große Lösungsformel

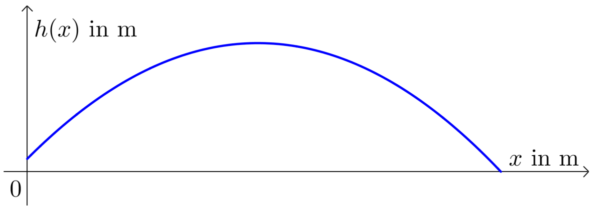
Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung $4 \cdot x^2 = 16 \cdot x + 9$ mit der großen Lösungsformel.

Wurfparabel

Die Flugbahn eines Tennisballs wird durch den Graphen einer quadratischen Funktion h modelliert:

$$h(x) = -0{,}01 \cdot x^2 + 0{,}18 \cdot x + 0{,}4$$

$x \ldots$ horizontal zurückgelegte Wegstrecke in m
$h(x) \ldots$ Höhe über dem Boden an der Stelle x in m



Berechne den Aufprallpunkt am Boden.

Sekante

Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = 0{,}5 \cdot x^2 - 1{,}5 \cdot x + 2$
Für die lineare Funktion g gilt: $g(x) = -0{,}5 \cdot x + 6$
Berechne die eingezeichneten Schnittpunkte S_1 und S_2.