

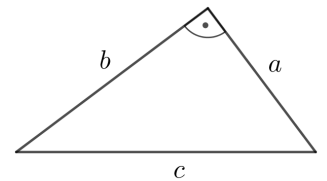
Wozu Termrechnung?



Vor mehr als 2000 Jahren schrieb **Euklid** sinngemäß:

„Am rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den Quadraten über den den rechten Winkel umfassenden Seiten zusammen gleich.“

Mithilfe von Termen schreiben wir heutzutage kurz: $a^2 + b^2 = c^2$



Kommutativgesetze

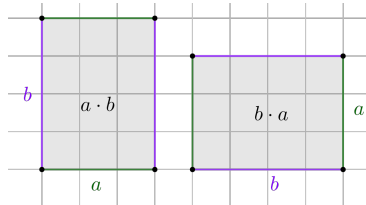
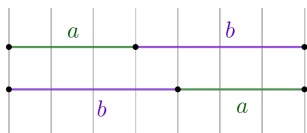


Für alle reellen Zahlen a , b und c gelten die **Kommutativgesetze**:

$$a + b = b + a$$

und

$$a \cdot b = b \cdot a$$



Assoziativgesetze

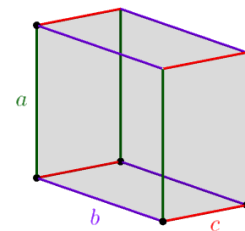
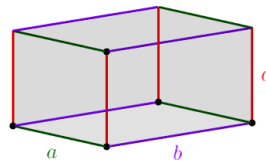
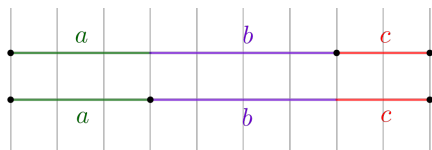


Für alle reellen Zahlen a und b gelten die **Assoziativgesetze**:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

und

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

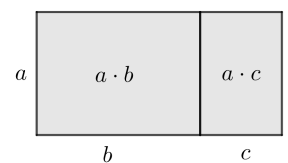


Distributivgesetz



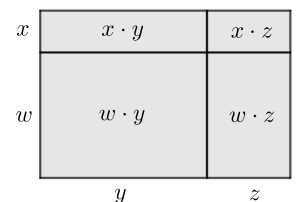
Für alle reellen Zahlen a , b und c gilt das **Distributivgesetz**:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$



Daraus folgt noch allgemeiner für alle reellen Zahlen w , x , y und z :

$$(w + x) \cdot (y + z) = w \cdot y + w \cdot z + x \cdot y + x \cdot z$$



Jeder Summand der ersten Klammer wird mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert.


Koeffizienten



Die Terme $7 \cdot x$ und $5 \cdot x$ sind – abgesehen von ihren **Koeffizienten** – gleich.

Wir können also ihre Summe bzw. Differenz mit dem Distributivgesetz berechnen:

$$7 \cdot x + 5 \cdot x = (7 + 5) \cdot x = 12 \cdot x \quad \text{bzw.} \quad 7 \cdot x - 5 \cdot x = (7 - 5) \cdot x = 2 \cdot x$$

Terme – Addition und Subtraktion 

Vereinfache so weit wie möglich.

Alle Rechenregeln für **negative Zahlen** gelten auch beim Rechnen mit Termen.

a) $7 \cdot x - 5 \cdot y - 4 \cdot x \cdot y - 9 \cdot x + 2 \cdot y + 7 \cdot x \cdot y =$

$$= -2 \cdot x - 3 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y$$

b) $(x - 4 \cdot y) + (2 \cdot y - 5 \cdot x) - (7 \cdot x + 3 \cdot y) =$

$$= x - 4 \cdot y + 2 \cdot y - 5 \cdot x - 7 \cdot x - 3 \cdot y = -11 \cdot x - 5 \cdot y$$

c) $5 \cdot x - 2 \cdot x \cdot 3 \cdot y - y \cdot x + 7 \cdot x =$

$$= 12 \cdot x - 7 \cdot x \cdot y$$

Ausmultiplizieren 

Multipliziere aus und vereinfache so weit wie möglich.

a) $(a + b) \cdot (a + b) =$

$$= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

b) $(a \cdot b) \cdot (a + b) =$

$$= a \cdot b \cdot a + a \cdot b \cdot b = a^2 \cdot b + a \cdot b^2$$

c) $(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) =$

$$= a \cdot b \cdot a \cdot b = a^2 \cdot b^2$$

d) $2 \cdot (4 \cdot x - 3 \cdot y) + 3 \cdot x \cdot (y - 4) =$

$$= 8 \cdot x - 6 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y - 12 \cdot x = -4 \cdot x - 6 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y$$

e) $(4 \cdot x - 2 \cdot y) \cdot (3 + x) - 5 \cdot (x + 3 \cdot y) =$

$$= 12 \cdot x + 4 \cdot x^2 - 6 \cdot y - 2 \cdot x \cdot y - 5 \cdot x - 15 \cdot y = 4 \cdot x^2 - 2 \cdot x \cdot y + 7 \cdot x - 21 \cdot y$$

f) $-3 \cdot (x - 2 \cdot y + 5) - (x + 2) \cdot (y - 3) =$

$$= -3 \cdot x + 6 \cdot y - 15 - (x \cdot y - 3 \cdot x + 2 \cdot y - 6) = -x \cdot y + 4 \cdot y - 9$$


Herausheben 

Trage Terme so in die Kästchen ein, dass beide Seiten äquivalent sind.

a) $3 \cdot x^2 - 5 \cdot x = x \cdot \underbrace{(3 \cdot x - 5)}_{= \left(\frac{3 \cdot x^2}{x} - \frac{5 \cdot x}{x}\right)}$

b) $x^4 + x^3 - x^2 = x^2 \cdot (x^2 + x - 1)$

c) $4 \cdot x^3 - 8 \cdot x^2 + 6 \cdot x = 2 \cdot x \cdot (2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 3)$

Bruchterme kürzen 

Kürze den Bruchterm so weit wie möglich.

Alle Rechenregeln für **Brüche** gelten auch für Bruchterme.

a) $\frac{10 \cdot x^5 \cdot y^2 \cdot z^2}{4 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot z} = \frac{5 \cdot x^2 \cdot z}{2 \cdot y}$

c) $\frac{3 \cdot (4 \cdot x - 2)^3}{(4 \cdot x - 2)^2 \cdot 9} = \frac{4 \cdot x - 2}{3}$

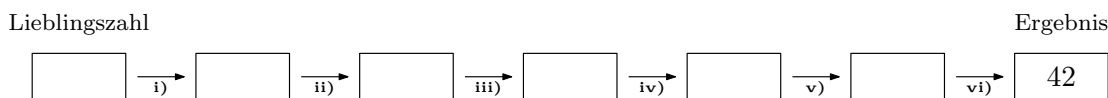
b) $\frac{15 \cdot \ominus^2}{6 \cdot \ominus^5} = \frac{5}{2 \cdot \ominus^3}$

d) $\frac{2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2}{6 \cdot x} = \frac{2 \cdot x \cdot (x^2 - 3 \cdot x)}{6 \cdot x} = \frac{x^2 - 3 \cdot x}{3}$

Zahlenrätsel 


Suche dir deine Lieblingszahl aus und führe die folgenden Rechenschritte durch.
Trage die Zwischenergebnisse in die Kästchen unten ein.

- i) Addiere 2 zu deiner Lieblingszahl.
- ii) Multipliziere das Ergebnis mit 6.
- iii) Subtrahiere 9 vom Ergebnis.
- iv) Dividiere das Ergebnis durch 3.
- v) Subtrahiere vom Ergebnis das Doppelte deiner Lieblingszahl.
- vi) Addiere 41 zum Ergebnis.



Meine Lieblingszahl bei solchen Rätseln ist x . Führe die gleichen Rechenschritte wie vorher mit x durch. Vereinfache nach jedem Schritt so weit wie möglich. Zeige, dass das Ergebnis hier immer 42 ist.

$$x \xrightarrow{+2} x + 2 \xrightarrow{\cdot 6} 6 \cdot x + 12 \xrightarrow{-9} 6 \cdot x + 3 \xrightarrow{:3} 2 \cdot x + 1 \xrightarrow{-2 \cdot x} 1 \xrightarrow{+41} 42 \checkmark$$

Bruchterme – Multiplikation und Division 

Schreibe den Term auf einen gemeinsamen Bruch und kürze so weit wie möglich.

a) $\frac{3 \cdot x}{4 \cdot y} \cdot (10 \cdot x \cdot y^2) = \frac{3 \cdot x \cdot 10 \cdot x \cdot y^2}{4 \cdot y} = \frac{15 \cdot x^2 \cdot y}{2}$

b) $\frac{3 \cdot x}{4 \cdot y} : (10 \cdot x \cdot y^2) = \frac{3 \cdot x}{4 \cdot y \cdot 10 \cdot x \cdot y^2} = \frac{3}{40 \cdot y^3}$

c) $(10 \cdot x \cdot y^2) : \frac{3 \cdot x}{4 \cdot y} = (10 \cdot x \cdot y^2) \cdot \frac{4 \cdot y}{3 \cdot x} = \frac{10 \cdot x \cdot y^2 \cdot 4 \cdot y}{3 \cdot x} = \frac{40 \cdot y^3}{3}$

d) $\frac{3 \cdot x \cdot y}{2} \cdot \frac{6 \cdot x}{y^2} = \frac{3 \cdot x \cdot y \cdot 6 \cdot x}{2 \cdot y^2} = \frac{9 \cdot x^2}{y}$

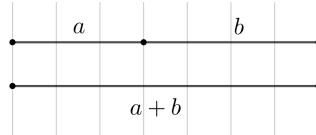
e) $\frac{3 \cdot x \cdot y}{2} : \frac{6 \cdot x}{y^2} = \frac{3 \cdot x \cdot y}{2} \cdot \frac{y^2}{6 \cdot x} = \frac{3 \cdot x \cdot y \cdot y^2}{2 \cdot 6 \cdot x} = \frac{y^3}{4}$

Rechnen mit Einheiten

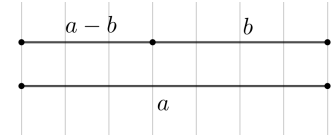


Wenn die Größen a und b jeweils die **Einheit** Zentimeter (cm) haben, dann hat die Größe ...

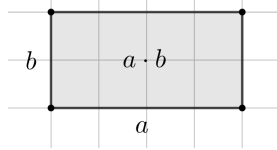
1) $a + b$ die Einheit **cm**.



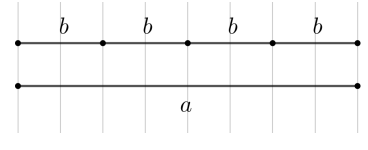
2) $a - b$ die Einheit **cm**.



3) $a \cdot b$ die Einheit **cm²**.



4) $\frac{a}{b}$ die Einheit **1**.



Rechnen mit Einheiten



Eine Formel zur Berechnung von x ist gegeben. Ermittle $[x]$, also die Einheit der Größe x .

Setze dazu die angegebenen Einheiten in die Formel ein, und vereinfache gegebenenfalls.

Alle in den Formeln vorkommenden Zahlen und die Konstante $\pi = 3,1415\dots$ haben jeweils die Einheit 1.

a) $x = \pi \cdot r^2$ mit $[r] = \text{m}$

$[x] = 1 \cdot \text{m}^2 = \text{m}^2$

b) $x = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$ mit $[a] = [b] = [c] = \text{cm}$

$[x] = 1 \cdot \text{cm} \cdot \text{cm} = \text{cm}^2$

c) $x = \rho \cdot V$ mit $[\rho] = \text{g/cm}^3$ und $[V] = \text{cm}^3$

$[x] = \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot \text{cm}^3 = \frac{\text{g} \cdot \text{cm}^3}{\text{cm}^3} = \text{g}$

d) $x = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ mit $[v_1] = [v_2] = \text{m/s}$ und $[t_1] = [t_2] = \text{s}$

$[x] = \frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \text{m/s}^2$

e) $x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$ mit $[a] = \text{m/s}^2$, $[v_0] = \text{m/s}$ und $[t] = \text{s}$

$[x] = 1 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{s}^2 = \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{s} = \text{m}$

Versteckte Klammern



Die beiden Terme $3 \cdot \frac{x+1}{2}$ und $\frac{3 \cdot x+1}{2}$ sind *nicht* äquivalent. Zum Beispiel: $3 \cdot \frac{0+1}{2} = \frac{3}{2}$ und $\frac{3 \cdot 0+1}{2} = \frac{1}{2}$

Bei jedem Bruch sind Zähler und Nenner jeweils in Klammern gesetzt.

Wir müssen diese Klammern nicht anschreiben, aber dürfen beim Rechnen nicht darauf vergessen:

$$3 \cdot \frac{x+1}{2} = 3 \cdot \frac{(x+1)}{2} = \frac{3 \cdot (x+1)}{2} = \frac{3 \cdot x + 3}{2}$$

Bruchterm \pm Bruchterm (Gleicher Nenner)



Schreibe den Term auf einen gemeinsamen Bruch und vereinfache so weit wie möglich.

a) $\frac{2}{x} - \frac{5}{x} + \frac{3}{x} = \frac{2-5+3}{x} = \frac{0}{x} = 0$

b) $\frac{2 \cdot x - 3 \cdot y}{x \cdot y} - \frac{4 \cdot y + 2 \cdot x}{x \cdot y} = \frac{2 \cdot x - 3 \cdot y - (4 \cdot y + 2 \cdot x)}{x \cdot y} = \frac{-7 \cdot y}{x \cdot y} = \frac{-7}{x}$

c) $\frac{x+y}{x^2-1} - 2 \cdot \frac{x-y}{x^2-1} = \frac{x+y-2 \cdot (x-y)}{x^2-1} = \frac{-x+3 \cdot y}{x^2-1}$

Bruch \pm Bruch (Verschiedene Nenner)

Schreibe den Term auf einen gemeinsamen Bruch und vereinfache so weit wie möglich.

$$\text{a) } \frac{4 \cdot x - 1}{2} - \frac{2 \cdot x + 3}{5} = \frac{5 \cdot (4 \cdot x - 1) - 2 \cdot (2 \cdot x + 3)}{10} = \frac{20 \cdot x - 5 - 4 \cdot x - 6}{10} = \frac{16 \cdot x - 11}{10}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{2 \cdot x - y}{3} - \frac{x + y}{6} &= \frac{2 \cdot (2 \cdot x - y) - (x + y)}{6} = \frac{4 \cdot x - 2 \cdot y - x - y}{6} = \\ &= \frac{3 \cdot x - 3 \cdot y}{6} = \frac{3 \cdot (x - y)}{6} = \frac{x - y}{2} \end{aligned}$$

Bruchterm \pm Bruchterm (Verschiedene Nenner)

Schreibe den Term auf einen gemeinsamen Bruch und vereinfache so weit wie möglich.

$$\text{a) } \frac{2}{3} + \frac{4}{x} = \frac{2 \cdot x}{3 \cdot x} + \frac{12}{3 \cdot x} = \frac{2 \cdot x + 12}{3 \cdot x}$$

$$\text{b) } \frac{3}{x} - \frac{5}{y} = \frac{3 \cdot y}{x \cdot y} - \frac{5 \cdot x}{x \cdot y} = \frac{3 \cdot y - 5 \cdot x}{x \cdot y}$$

$$\text{c) } \frac{4}{x+1} - \frac{2}{x} = \frac{4 \cdot x}{(x+1) \cdot x} - \frac{2 \cdot (x+1)}{(x+1) \cdot x} = \frac{4 \cdot x - 2 \cdot (x+1)}{(x+1) \cdot x} = \frac{2 \cdot x - 2}{(x+1) \cdot x}$$

$$\text{d) } \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} = \frac{2 \cdot x}{x^3} + \frac{3}{x^3} = \frac{2 \cdot x + 3}{x^3}$$

$$\text{e) } 1 + \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$$\text{f) } \frac{3}{x \cdot (x-1)} - \frac{2}{x^2} = \frac{3 \cdot x}{x^2 \cdot (x-1)} - \frac{2 \cdot (x-1)}{x^2 \cdot (x-1)} = \frac{3 \cdot x - 2 \cdot (x-1)}{x^2 \cdot (x-1)} = \frac{x+2}{x^2 \cdot (x-1)}$$

Goldener Schnitt



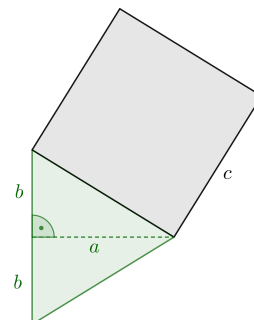
Das rechts unten dargestellte Quadrat mit Seitenlänge c hat den Flächeninhalt F_Q .

Das gleichschenkelige Dreieck mit Basis $2 \cdot b$ und zugehöriger Höhe a hat den Flächeninhalt F_D .

Es gilt $F_Q : F_D = \sqrt{5} : 1$.

Das Quadrat ist also $\sqrt{5} = 2,236\dots$ -Mal so groß wie das gleichschenkelige Dreieck.

$$\text{Berechne: } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2}{a \cdot b} + \frac{b^2}{a \cdot b} = \frac{a^2 + b^2}{a \cdot b} = \frac{c^2}{a \cdot b} = \frac{F_Q}{F_D} = \sqrt{5}$$



Das Verhältnis der Längen a und b ist in diesem Fall der **Goldene Schnitt**.

